1MI
جبر 2
2020/2019

السلسلة رقم (02)

التمرين 03

أ) بين أن $\mathcal{F}$ تشكل أساسا لـ $\mathbb{P}_2(X)$

نذكر أنه من أجل أن تكون جملة $\mathcal{F}$ تشكل أساسا لفضاء شعاعي E يجب أن تحقق ما يلي:

① $\mathcal{F}$ مولدة لـ E

② $\mathcal{F}$ مستقلة خطيا

بما أن $\text{card}\,\mathcal{F} = 3 = \dim \mathbb{P}_2(X)$ يكفي اثبات أحد الشرطين

لنثبت أن الجملة $\mathcal{F}$ مستقلة خطيا

ليكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0_{\mathbb{P}_2(X)}$$

$$\alpha X^2 + \beta (X-1)^2 + \gamma (X+1)^2 = 0X^2 + 0X + 0$$

$$\Rightarrow \alpha X^2 + \beta (X-1)^2 + \gamma (X+1)^2 = 0X^2 + 0X + 0$$

$$\Rightarrow \alpha X^2 + \beta (X^2 - 2X + 1) + \gamma (X^2 + 2X + 1) = 0X^2 + 0X + 0$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta + \gamma) X^2 + (-2\beta + 2\gamma) X + (\beta + \gamma) = 0X^2 + 0X + 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \text{---}① \\ -2\beta + 2\gamma = 0 \quad \text{---}② \\ \beta + \gamma = 0 \quad \text{---}③ \end{cases}$$

من المعادلة رقم ③ نجد $\beta = -\gamma$ ثم نعوض في المعادلة ②

نجد $-2(-\gamma) + 2\gamma = 0$ ومنه $4\gamma = 0$ ومنه $\boxed{\gamma = 0}$

ومنه من المعادلة رقم ③ نجد $\boxed{\beta = 0}$

ومنه بالتعويض في المعادلة رقم ① نجد $\boxed{\alpha=0}$

ومنه $\alpha=\beta=\gamma=0$

إذن الجملة $\mathcal{F}$ مستقلة خطيا فهي إذن تشكل أساس

لـ $\mathbb{P}_2(X)$.

ب) $Q(X)=12$ كتابة في الأساس القانوني

يعني
$$Q(X)=0.X^2+0.X+12.1$$

كتابة $Q(X)$ في الأساس $\mathcal{F}$ هو إيجاد α,β,γ

التي تحقق

$$Q(X)=\alpha P_1(X)+\beta P_2(X)+\gamma P_3(X)$$
$$=\alpha X^2+\beta(X-1)^2+\gamma(X+1)^2$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)X^2+(-2\beta+2\gamma)X+(\beta+\gamma)$$

ومنه
$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0 & \dots(1)\\ -2\beta+2\gamma=0 & \dots(2)\\ \beta+\gamma=12 & \dots(3)\end{cases}$$

من المعادلة رقم ③ نجد $\beta=12-\gamma$ نعوض في (2) نجد

$\beta=6$ ومنه $\gamma=6$

نعوض في (1) نجد $\alpha=-12$

ومنه $Q(X)=-12P_1(X)+6P_2(X)+6P_3(X)$
$$=-12X^2+6(X-1)^2+6(X+1)^2$$

وهي كتابة $Q(X)$ في الأساس $\mathcal{F}=\{P_1,P_2,P_3\}$

$$\dim \mathbb{P}_2(X) = 3$$

لأن كل كثير حدود ينتمي إلى $\mathbb{P}_2(X)$ يكتب من الشكل

$$P(X) = aX^2 + bX + c.1$$

الجملة $\{X^2, X, 1\}$ هي الأساس القانوني لـ $\mathbb{P}_2(X)$