3) هل $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} ① \; F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \\ ② \; F + G = \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

لدينا

$$F \cap G = [\{(1,1,3)\}] \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$\Rightarrow F \oplus G \neq \mathbb{R}^3.$$

1MI
جبر 2
2019/2020

السلسلة رقم (02)

التمرين 04 :

1) $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y-z=0\}$

بين أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

* ① $F\subset\mathbb{R}^3$ (واضح من التعريف)

*

$O_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)$

بما أن $2.0+0-0=0$

يعني $O_{\mathbb{R}^3}\in F \Rightarrow F\neq\emptyset$

②

$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \forall X,Y\in F$

$X\in F \Rightarrow X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y-z=0$

$Y\in F \Rightarrow Y=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3 / 2x'+y'-z'=0$

المطلوب هو إثبات أن $\alpha X+\beta Y\in F$

$$\alpha X+\beta Y=\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')$$
$$=(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z')\in\mathbb{R}^3$$

$$2(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')-(\alpha z+\beta z')$$
$$=\alpha(2x+y-z)+\beta(2x'+y'-z')$$
$$=\alpha.0+\beta.0$$
$$=0$$

ومنه $\alpha X + \beta Y \in F$

ومنه F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$ (ف.ش.ج.)

② إيجاد الأسس وتحديد الأبعاد:

* $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y = z\}$

$X \in F \Rightarrow X = (x,y,z) \quad / 2x + y = z$
$= (x, y, 2x+y)$
$= (x, 0, 2x) + (0, y, y)$
$= x(1,0,2) + y(0,1,1)$

ومنه
$F = [\{(1,0,2), (0,1,1)\}] = [\{U, V\}]$

ندرس الاستقلال الخطي لهذان الشعاعان

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\alpha(1,0,2) + \beta(0,1,1) = 0_{\mathbb{R}^3}$
$\Rightarrow (\alpha, \beta, 2\alpha + \beta) = (0,0,0)$
$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0$

ومنه الشعاعان مستقلان خطيا إذن يشكلان أساس لـ F

و $\dim F = 2$

$* \; G = [\{(1,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}]$

نسمي $U' = (1,1,0)$ $\quad V' = (0,0,1)$ $\quad W = (1,1,1)$

نلاحظ أن $W = U' + V'$

إذن الأشعة مرتبطة خطيا ومنه $G = [\{(1,1,0), (0,0,1)\}]$

ندرس الاستقلال الخطي لـ U' و V'

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha U' + \beta V' = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow \alpha(1,1,0) + \beta(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha, \alpha, \beta) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \wedge \\ \beta = 0 \end{cases}$$

ومنه U' و V' مستقلان خطيا فهما يشكلان أساس لـ G

و $\dim G = 2$

$* \; F + G = \{ X \in \mathbb{R}^3 \; / \; X = X_1 + X_2 \; , \; X_1 \in F \wedge X_2 \in G \}$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$$F + G = [\{U, V, U', V'\}]$$

$$= [\{V, U', V'\}]$$

ندرس الاستقلال الخطي لهذه الأشعة

$$\alpha V + \beta U' + \gamma V' = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \alpha(0,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

ومنه الأشعة مستقلة خطيا إذن تشكل أساس لـ $F+G$

و $\dim(F+G)=3$

$* \; F\cap G = \{ X\in\mathbb{R}^3 / X\in F \wedge X\in G \}$

$= \{ X\in\mathbb{R}^3 / \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R} : X=\alpha U+\beta V \wedge \exists \alpha',\beta'\in\mathbb{R} : X=\alpha' U'+\beta' V' \}$

$F\cap G = \{ X\in\mathbb{R}^3 / \exists \alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathbb{R} : X=\alpha(1,0,2)+\beta(0,1,1) = \alpha'(1,1,0)+\beta'(0,0,1) \}$

$X\in F\cap G \Rightarrow X=(\alpha,\beta,2\alpha+\beta)=(\alpha',\alpha',\beta')$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=\alpha' \\ \beta=\alpha' \\ 2\alpha+\beta=\beta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\alpha' \\ \beta=\alpha' \\ \beta'=3\alpha' \end{cases}$

$\Rightarrow X=(\alpha',\alpha',3\alpha')=\alpha'(1,1,3)$

$\Rightarrow F\cap G = [\{(1,1,3)\}]$

ومنه $(1,1,3)$ يولد $(F\cap G)$ وهو مستقل خطيا إذن يشكل أساس و

$\dim F\cap G = 1$