جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية علوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

2020/2019 السنة الأولى MI مقياس جبر 2

حل التمرين الأول من السلسلة رقم 02

$\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$

لدينا $U=(1,-3,2)$ و $V=(2,-1,1)$

1) هل كل من الشعاعين $X=(1,7,-4)$ ، $Y=(2,-5,4)$ عبارة خطية لـ U و V

X عبارة خطية لـ U و V $\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}: X=\alpha U+\beta V$

$$\Rightarrow (1,7,-4)=\alpha(1,-3,2)+\beta(2,-1,1)$$

$$=(\alpha+2\beta,-3\alpha-\beta,2\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta=1\\-3\alpha-\beta=7\\2\alpha+\beta=-4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-3\\\beta=2\end{cases} \Rightarrow \boxed{X=-3U+2V}$$

Y عبارة خطية لـ U و V $\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}: Y=\alpha U+\beta V$

$$\Rightarrow (2,-5,4)=\alpha(1,-3,2)+\beta(2,-1,1)$$

$$=(\alpha+2\beta,-3\alpha-\beta,2\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta=2 \quad \cdots ①\\-3\alpha-\beta=-5 \quad \cdots ②\\2\alpha+\beta=4 \quad \cdots ③\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=1\\\beta=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftarrow ③+② \Leftarrow ①$$

نتأكد من أن α و β تحقق المعادلات الثلاثة:

$1+2\cdot\frac{1}{2}=2$

$-3(1)-\frac{1}{2}=\frac{-7}{2}\neq -5$

$2(1)+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\neq 4$

ومنه الشعاع $y=(2,-5,4)$ ليس عبارة خطية لـ U و V

2) أوجد العدد R بحيث: $W=(1,-1,R)\in[\{U,V\}]$

$W\in[\{U,V\}]\Rightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ ;\quad W=\alpha U+\beta V$

$\Rightarrow (1,-1,R)=\alpha(1,-3,2)+\beta(2,-1,1)$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta=1\\ -3\alpha-\beta=-1\\ 2\alpha+\beta=R\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{1}{5}\\ \beta=\frac{2}{5}\\ R=\frac{4}{5}\end{cases}\Rightarrow \boxed{R=\frac{4}{5}}$$