جامعة محمد خيضر بسكرة	السنة الأولى MI
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة	مقياس جبر2
قسم الرياضيات	2020/2019

السلسلة رقم 02

استقلال، ارتباط وتوليد أشعة

التمرين 01: ليكن $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$، وليكن $U = (1,-3,2)$ ، $V = (2,-1,1)$

1) هل كل من الشعاعين $X = (1,7,-4)$ ، $Y = (2,-5,4)$ عبارة خطية لـ U و V .

2) أوجد العدد k بحيث: $W = (1,-1,k) \in [\{U,V\}]$.

التمرين 02:

1) من بين العائلات التالية، ما هي المولدة للفضاء الشعاعي E؟

a) $E = \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(3,-1),(1,1)\}, \mathcal{F}_2 = \{(-1,1)\ ,(3,-3)\}, \mathcal{F}_3 = \{(3,-1)\ ,(1,1),(1,-2)\}$$

b) $E = \mathbb{P}_2[\mathrm{X}]$:

$$\mathcal{F}_1 = \{X^2\ ,3X,-1\}, \mathcal{F}_2 = \{X^2+X, X-1\}$$

c) $E = \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(1,0,1)\ ,(-1,1,0)\}, \mathcal{F}_2 = \{(1,0,-1)\ ,(2,0,3)\ ,(3,1,-1)\}$$

2) من بين العائلات التالية، ما هي المستقلة خطيا في E ؟

a) $E = \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(-1,3)\ ,(0,1)\}, \mathcal{F}_2 = \{(1,2)\ ,(-1,1),(-1,2)\}$$

b) $E = \mathbb{P}_2[\mathrm{X}]$:

$$\mathcal{F}_1 = \{X^2+1\ ,X-2\}, \mathcal{F}_2 = \{X, X+1, X-1\}, \mathcal{F}_3 = \{X^2-1, X^2+1, 2X\}$$

c) $E = \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(1,1,0)\ ,(1,0,1),(0,1,1)\ \}, \mathcal{F}_2 = \{(1,2,3)\ ,(3,2,1)\ ,(4,4,4)\}$$

d) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}_1 = \{e^x\ ,xe^x\}, \mathcal{F}_2 = \{\cos x\ \ ,\sin x\}$$

التمرين 03: ليكن $\mathbb{P}_2[\mathrm{X}]$ الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود ذات الدرجة أقل أو تساوي 2 ولتكن الجملة $\mathcal{F} = \{P_1\ ,P_2\ \ ,P_3\}$ حيث:

$$P_1(X) = X^2\ ,P_2(X) = (X-1)^2\ ,P_3(X) = (X+1)^2$$

أ- بين أن $\mathcal{F}$ تشكل أساسا لـ $\mathbb{P}_2[\mathrm{X}]$.

ب- استنتج كتابة كثير الحدود $Q(X) = 12$ في هذا الأساس.

التمرين 04: $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$، ليكن الفضاء الشعاعي الجزئي $G = [\{(1,1,0)\ ,(0,0,1)\ ,(1,1,1)\}]$

ولتكن المجموعة F المعرفة كما يلي: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ 2x+y-z = 0\}$

-1 بين أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

-2 أوجد أساسا لكل من: $F \cap G, F+G, G, F$ (إن وجد)، محددا أبعادها.

-3 هل $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ ؟

جامعة محمد خيضر بسكرة
ك ع د ع ط ح
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس: جبر 2
2020/2019

السلسلة 02
استقلال، ارتباط وتوليد أشعة

تمرين01:

تمرين 1: $\mathbb{R}^3$ ف.ش على $\mathbb{R}$

$U=(1,-3,2)$, $V=(2,-1,1)$

1) $X=(1,7,-4)$ عبارة خطية لـ U و V

$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}: X=\alpha U+\beta V$

$(1,7,-4)=\alpha(1,-3,2)+\beta(2,-1,1)$

$=(\alpha+2\beta,-3\alpha-\beta,2\alpha+\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta=1 & \dots (1) \\ -3\alpha-\beta=7 & \dots (2) \\ 2\alpha+\beta=-4 & \dots (3) \end{cases}$$

$(2)+(3) \Rightarrow -\alpha=3 \Rightarrow \alpha=-3$

$(1) \Rightarrow 2\beta=1-\alpha \Rightarrow 2\beta=1+3 \Rightarrow \beta=\frac{4}{2} \Rightarrow \beta=2$

$\Rightarrow \exists \alpha=-3, \beta=2 \in \mathbb{R}: X=-3U+2V$.

2) $Y=(2,-5,4)$ عبارة خطية لـ U و V

$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}: Y=\alpha U+\beta V$

$\Rightarrow (2,-5,4)=(\alpha+2\beta,-3\alpha-\beta,2\alpha+\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta=2 & \dots (1) \\ -3\alpha-\beta=-5 & \dots (2) \\ 2\alpha+\beta=4 & \dots (3) \end{cases}$$

$(2)+(3) \Rightarrow -\alpha=-1 \Rightarrow \alpha=1$

$(1) \Rightarrow 2\beta=2-\alpha \Rightarrow \beta=\frac{1}{2}$

نتأكد إذا قيم α و β تحقق المعادلات الثلاث

$1+2\cdot\frac{1}{2}=2$

$-3\cdot 1-\frac{1}{2}=-3-\frac{1}{2}=\frac{-6-1}{2}=\frac{-7}{2}\neq -5$

$2\cdot 1+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}\neq 4$

ومنه: الشعاع $Y=(2,-5,4)$ ليس عبارة خطية لـ U و V.

3) إيجاد العدد k بحيث:

$W=(1,-1,k)\in[\{U,V\}]$

$W\in[\{U,V\}] \Rightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}: W=\alpha U+\beta V$

$\Rightarrow (1,-1,k)=\alpha(1,-3,2)+\beta(2,-1,1)$

$=(\alpha+2\beta,-3\alpha-\beta,2\alpha+\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta=1 & \text{---} (1) \\ -3\alpha-\beta=-1 & \text{---} (2) \\ 2\alpha+\beta=k & \text{---} (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \alpha=1-2\beta$.

$(2) \Rightarrow -3(1-2\beta)-\beta=-1$

$\Rightarrow -3+6\beta-\beta=-1$

$\Rightarrow 5\beta=2 \Rightarrow \beta=\frac{2}{5}$

$\Rightarrow \alpha=1-2\beta=1-2\cdot\frac{2}{5}=1-\frac{4}{5}=\frac{5-4}{5}=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow \alpha=\frac{1}{5}$

$(3) \Rightarrow k=2\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{2+2}{5}=\frac{4}{5} \Rightarrow k=\frac{4}{5}$

التمرين 02: 1) من بين العائلات التالية، ماهي المولدة للفضاء الشعاعي E:

a) $E=\mathbb{R}^2$

* $F_1=\{(3,-1),(1,1)\}$

ليكن E ف.ش على $\mathbb{K}$ و $\{e_i\}_{i\in I}\subset E$ عائلة من E
نقول أن $\{e_i\}_{i\in I}$ مولدة لـ E إذا كان كل عنصر $x\in E$
يكتب على شكل عبارة خطية لـ $\{e_i\}_{i\in I}$
$\forall x\in E, \exists\{\lambda_i\}_{i\in I}\subset\mathbb{K}: x=\sum_{i\in I}\lambda_i e_i$
أي: $[\{e_i\}_{i\in I}]=E$

$F=\{Y,Z\}$ مولدة لـ E
$\Leftarrow \forall X\in E, \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}: X=\alpha Y+\beta Z$

$\forall X\in\mathbb{R}^2, \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}: X=\alpha(3,-1)+\beta(1,1)$

$\Rightarrow (x,y)=(3\alpha+\beta,-\alpha+\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3\alpha+\beta & \dots (1) \\ y=-\alpha+\beta & \dots (2) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Rightarrow 4\alpha=x-y \Rightarrow \alpha=\frac{x-y}{4}$.

$(2) \Rightarrow \beta=y+\alpha=y+\frac{x-y}{4}=\frac{4y+x-y}{4}=\frac{3y+x}{4}$

$\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2: \exists\alpha=\frac{x-y}{4}, \beta=\frac{3y+x}{4}\in\mathbb{R}:$

$X=\alpha(3,-1)+\beta(1,1)$

اذن: F_1 تولد $\mathbb{R}^2$.

* $F_2=\{(-1,1),(3,-3)\}$.

$\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2: \exists \overset{??}{\alpha},\beta\in\mathbb{R}: (x,y)=\alpha(-1,1)+\beta(3,-3)$

$(x,y)=\alpha(-1,1)+\beta(3,-3)$

$\Rightarrow (x,y)=(-\alpha+3\beta,\alpha-3\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-\alpha+3\beta \\ y=\alpha-3\beta \end{cases} \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow x=-y$$

نلاحظ أنه: ليس جميع الثنائيات (x,y) من $\mathbb{R}^2$ تحقق $x=-y$

اذن: F_2 لا تولد $\mathbb{R}^2$.

طريقة ثانية: نريد معرفة هل F_2 مولد لـ $\mathbb{R}^2$ أي
$E=[\{(-1,1),(3,-3)\}]$??

$[\{(-1,1),(3,-3)\}]$
$=\{\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}: X=\alpha(-1,1)+\beta(3,-3)\}$.
$=\{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}: (x,y)=\alpha(-1,1)-3\beta(-1,1)\}$.
$=\{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}: (x,y)=(\alpha-3\beta)(-1,1)\}$.
$=[\{(-1,1)\}]$.

انطلاقا من النتيجة التالية:

إذا كان E ف.ش ذو بعد n $(\dim E=n)$ فإن:
• كل عائلة مستقلة تحوي على الأكثر n عنصر.
• كل عائلة مولدة تحوي على الأقل n عنصر.

نستنتج أن: F_2 ليست مولدة لـ E لأن:
اذن: $\operatorname{card}\{(-1,1)\}=1<\dim E=2$
$E\neq[\{(-1,1)\}]=[\{(-1,1),(3,-3)\}]$

a) $E=\mathbb{R}^2$.

⊛ $F_1=\{(-1,3),(0,1)\}$.

$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R};\ \alpha(-1,3)+\beta(0,1)=0_{\mathbb{R}^2}\Rightarrow\alpha=\beta=0$???

لتكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\ \alpha(-1,3)+\beta(0,1)=0_{\mathbb{R}^2}$

$\Rightarrow(-\alpha, 3\alpha+\beta)=(0,0)$

$\Rightarrow\begin{cases}-\alpha=0 & \dots ①\\ 3\alpha+\beta=0 & \dots ②\end{cases}$

$① \Rightarrow \alpha=0$
$② \Rightarrow \beta=-3\alpha=0$ $\Rightarrow \alpha=0$ و $\beta=0$

اذن : F_1 مستقلة خطيا .

⊛ $F_2=\{(1,2),(-1,1),(-1,2)\}$.

لتكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}:\ \alpha(1,2)+\beta(-1,1)+\gamma(-1,2)=0_{\mathbb{R}^2}$

$\Rightarrow(\alpha-\beta-\gamma,\ 2\alpha+\beta+2\gamma)=(0,0)$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha-\beta-\gamma=0 & \dots ①\\ 2\alpha+\beta+2\gamma=0 & \dots ②\end{cases}$

$①+② \Rightarrow 3\alpha+\gamma=0 \Rightarrow \gamma=-3\alpha$.

$① \Rightarrow \alpha-\beta-(-3\alpha)=0 \Rightarrow -\beta+4\alpha=0 \Rightarrow \beta=4\alpha$

$② \Rightarrow 2\alpha+4\alpha+2(-3\alpha)=0$

$\Rightarrow 6\alpha-6\alpha=0$

اذن : α تأخذ مالانهاية من القيم وبالتالي β و γ أيضا تأخذان مالانهاية من القيم

ومنه : العائلة F_2 ليست مستقلة خطيا .

طريقة ثانية : يمكن استعمال النتيجة السابقة :

لدينا : $\text{card} F_2=3>\dim E=2$

اذن : F_2 ليست مستقلة خطيا .

طريقة ثالثة :

ملاحظة : اذا كانت العائلة $\{x_i\}_{i=\overline{1,n}}$ ليست مستقلة خطيا فهي مرتبطة خطيا
ونقول أن العائلة $\{x_i\}_{i=\overline{1,n}}$ مرتبطة خطيا إذا تحقق : أن أحد عناصر هذه العائلة هو مزيج خطي لبقية العناصر

نلاحظ أن : $(1,2)=-4(-1,1)+3(-1,2)$

ومنه : F_2 ليست مستقلة خطيا .

b) $E=\mathbb{R}_2[X]$

⊛ $F_1=\{X^2+1,\ X-2\}$.

لتكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\ \alpha(X^2+1)+\beta(X-2)=0_{\mathbb{R}_2[X]}=\Theta(X)$

$\Rightarrow \alpha X^2+\beta X+(\alpha-2\beta)=0_{\mathbb{R}_2[X]}=0.X^2+0.X+0.1$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \alpha-2\beta=0\end{cases}$

ومنه : F_1 مستقلة خطيا .

⊛ $F_3=\{(3,-1),(1,1),(1,-2)\}$.

انطلاقا من النتيجة التالية :

اذا كانت A مولدة لـ E و $A\subset B$ فإن : B مولدة أيضا لـ E .

نستنتج أن : F_3 مولدة لـ E لأن : F_1 مولدة لـ E و $F_1\subset F_3$.

b) $E=\mathbb{R}_2[X]$.

$\forall P\in\mathbb{R}_2[X]\Rightarrow P(X)=aX^2+bX+c$.

⊛ $F_1=\{X^2, 3X, -1\}$.

$\forall P\in\mathbb{R}_2[X],\ \exists\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}:\ P(X)=\alpha(X^2)+\beta(3X)+\gamma(-1)$???

$\Rightarrow aX^2+bX+c=\alpha X^2+3\beta X-\gamma$.

$\Rightarrow\begin{cases}a=\alpha\\ b=3\beta\\ c=-\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=a\\ \beta=\frac{b}{3}\\ \gamma=-c\end{cases}$

اذن : $\forall P\in\mathbb{R}_2[X],\ \exists\alpha=a,\ \beta=\frac{b}{3},\ \gamma=-c\in\mathbb{R}:$

$P(X)=\alpha(X^2)+\beta(3X)+\gamma(-1)$

ومنه : F_1 مولدة لـ E .

⊛ $F_2=\{X^2+X,\ X-1\}$.

لدينا : $\text{card} F_2=2<\dim E=3$

اذن : F_2 ليست مولدة لـ E .

c) $E=\mathbb{R}^3$.

⊛ $F_1=\{(1,0,1),(-1,1,0)\}$.

لدينا : $\text{card} F_1=2<\dim E=3$

اذن : F_1 ليست مولدة لـ E .

⊛ $F_2=\{(1,0,-1),(2,0,3),(3,1,-1)\}$.

$\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \exists\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}:\ X=\alpha(1,0,-1)+\beta(2,0,3)+\gamma(3,1,-1)$???

$\Rightarrow\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x,y,z)=(\alpha+2\beta+3\gamma,\ \gamma,\ -\alpha+3\beta-\gamma)$

$\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha+2\beta+3\gamma & \dots ①\\ y=\gamma & \dots ②\\ z=-\alpha+3\beta-\gamma & \dots ③\end{cases}$

$② \Rightarrow \gamma=y$

$①+③ \Rightarrow x+z=5\beta+2\gamma \Rightarrow 5\beta=x+z-2y$.

$\Rightarrow \beta=\frac{x+z-2y}{5}$.

$③ \Rightarrow -\alpha+3\left(\frac{x+z-2y}{5}\right)-y=z$

$\Rightarrow -\alpha+\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}z-\frac{6}{5}y-y=z$

$\Rightarrow \alpha=\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}z-\frac{11}{5}y$

اذن : $\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \exists\left(\alpha=\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}z-\frac{11}{5}y\right),$
$\left(\beta=\frac{x+z-2y}{5}\right),(\gamma=y)\in\mathbb{R}:$

$X=\alpha(1,0,-1)+\beta(2,0,3)+\gamma(3,1,-1)$

ومنه : F_2 مولدة لـ E .

2) من بين العائلات التالية ، ماهي المستقلة خطيا :

تعريف : نقول أن العائلة $\{x_i\}_{i\in I}$ أنها مستقلة خطيا اذا تحقق :
$\forall\{\lambda_i\}_{i\in I}\subset\mathbb{K};\ \sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0_E\Rightarrow\lambda_i=0_{\mathbb{K}},\ \forall i\in I$
حيث : $(E,+,\cdot)$ ف.ش على الحقل $\mathbb{K}$.
$\{x_i\}_{i\in I}$ عائلة من الأشعة من E .
$\{\lambda_i\}_{i\in I}$ عائلة من السلميات من $\mathbb{K}$.

$d)\ E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

* $F_1=\{e^x, xe^x\}$.

لتكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha e^x+\beta xe^x=0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow (\alpha+\beta x)e^x=0_E(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$e^x\neq 0 \Rightarrow \alpha+\beta x=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$

ومنه: F_1 مستقلة خطيا.

* $F_2=\{\cos x, \sin x\}$.

لتكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}: \alpha\cos x+\beta\sin x=0_E(x)$.

$\Rightarrow \alpha\cos x+\beta\sin x=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

وبالخصوص من أجل $x=0$ ، $x=\frac{\pi}{2}$: يكون لدينا على الترتيب:

$\begin{cases}\alpha\cos 0+\beta\sin 0=0\\ \alpha\cos\frac{\pi}{2}+\beta\sin\frac{\pi}{2}=0.\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha\cdot 1+\beta\cdot 0=0\\ \alpha\cdot 0+\beta\cdot 1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$

ومنه: F_2 مستقلة خطيا.

تعريف الأساس: ليكن E ف. ش على $\mathbb{R}$
و $B=\{e_i\}_{i\in I}\subset E$. نقول أن B أساس لـ E إذا كانت B مولدة ومستقلة خطيا.

ملاحظة: إذا كان: $\mathrm{card}\,B=\dim E$ فإنه لإثبات أن B أساس لـ E يكفي إثبات أحد الشرطين أي B مولدة أو B مستقلة خطيا.

تمرين 10: ليكن $\mathcal{P}_2$ الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود ذات الدرجة أقل أو تساوي 2 و ليكن $F=\{P_1,P_2,P_3\}$ حيث:

$P_1(x)=x^2;\ P_2(x)=(x-1)^2;\ P_3(x)=(x+1)^2$.

* إثبات أن F هو أساس لـ $\mathcal{P}_2$:

بما أن: $\mathcal{P}_2$ ف. ش ذو بعد 3. يكفي أن نثبت أن $\{P_1,P_2,P_3\}$ أشعة مستقلة.

$\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$?

$\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3=0 \Rightarrow \alpha x^2+\beta(x-1)^2+\gamma(x+1)^2=0$

$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)x^2+(-2\beta+2\gamma)x+\beta+\gamma=0$

بما أن: $\{1,X,X^2\}$ تشكل أساس قانوني لـ $\mathcal{P}_2$ نجد:

$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ -\beta+\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0.$

$\Leftarrow \{P_1,P_2,P_3\}$ تشكل أساس لـ $\mathcal{P}_2$.

* استنتاج كتابة كثير الحدود $Q(x)=12$ في هذا الأساس:

لتكن α ، β ، γ احداثيات Q في الأساس $\{P_1,P_2,P_3\}$ نجد:

$Q(X)=\alpha P_1(X)+\beta P_2(X)+\gamma P_3(X)=(\alpha+\beta+\gamma)X^2+2(\gamma-\beta)X+\beta+\gamma$

بما أن: احداثيات Q في الأساس القانوني $\{1,X,X^2\}$ هي $(12,0,0)$.

فإننا نحصل على المعادلات:

$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ -2\beta+2\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases}$

ذات الحل: $\alpha=-12, \beta=\gamma=6$.

$\Leftarrow Q=-12P_1+6P_2+6P_3$

$\Leftarrow$ احداثيات Q في الأساس $\{P_1,P_2,P_3\}$ هي: $Q(-12,6,6)$

* $F_2=\{X, X+1, X-1\}$.

لتكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}: \alpha(X)+\beta(X+1)+\gamma(X-1)=0_{\mathbb{R}_2[X]}$

$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)X+(\beta-\gamma)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0 & \ldots ①\\ \beta-\gamma=0 & \ldots ②\end{cases}$

$② \Rightarrow \beta=\gamma$.

$① \Rightarrow \alpha+2\gamma=0 \Rightarrow \alpha=-2\gamma$.

$① \Rightarrow -2\gamma+2\gamma=0 \Rightarrow \gamma-\gamma=0$.

اذن: α ، β ، γ لها العديد من القيم

ومنه: العائلة F_2 ليست مستقلة خطيا.

بإمكاننا أيضا أن نلاحظ أن:

$X=\frac{1}{2}(X+1)+\frac{1}{2}(X-1)$

* $F_3=\{X^2-1, X^2+1, 2X\}$.

لتكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}: \alpha(X^2-1)+\beta(X^2+1)+\gamma(2X)=0_{\mathbb{R}_2[X]}$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)X^2+2\gamma X+(\beta-\alpha)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=0 & \ldots ①\\ 2\gamma=0 & \ldots ②\\ \beta-\alpha=0 & \ldots ③\end{cases}$

$② \Rightarrow \gamma=0$.

$①+③ \Rightarrow 2\beta=0 \Rightarrow \beta=0$

$① \Rightarrow \alpha=-\beta \Rightarrow \alpha=0$

ومنه: F_3 مستقلة خطيا.

$c)\ E=\mathbb{R}^3$

(1

$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}: \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=0.\\ \alpha+\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \beta=-\alpha. \Rightarrow \gamma=-\alpha.$

$\Rightarrow -\alpha-\alpha=0 \Rightarrow -2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0.$

$\Rightarrow \beta=0 \Rightarrow \gamma=0.$

اذن هذه الأشعة مستقلة خطيا.

(2

$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}\right\}$ (V_1, V_2, V_3)

$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}: \alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+3\beta+4\gamma=0. & —(1)\\ 2\alpha+2\beta+4\gamma=0 & —(2)\\ 3\alpha+\beta+4\gamma=0. & —(3)\end{cases}$

$(1)-(3) \Rightarrow -2\alpha+2\beta=0 \Rightarrow \alpha=\beta.$

$(2) \Rightarrow 2\alpha+2\alpha+4\gamma=0 \Rightarrow 4\alpha+4\gamma=0 \Rightarrow \gamma=-\alpha.$

$(1) \Rightarrow \alpha+3\cdot(\alpha)+4(-\alpha)=0 \Rightarrow 4\alpha-4\alpha=0$

α تأخذ مالانهاية من القيم

اذن: V_1 ، V_2 ، V_3 ليست مستقلة خطيا.

أو يمكن الملاحظة أن: $V_3=V_1+V_2$

التمرين 04: $\mathbb{R}^3$ ف.ش على الحقل $\mathbb{R}$. ليكن ف.ش.ج

$$G=[\{(1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}]$$

ولتكن المجموعة F المعرفة كما يلي:

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y-z=0\}$$

1) نبين أن: F ف.ش.ج من $\mathbb{R}^3$:

① * $F\subset\mathbb{R}^3$ (من تعريف المجموعة F).

* $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3 / 2.0+0-0=0$

$\Rightarrow (0,0,0)\in F \Rightarrow F\neq\emptyset$

② ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ، $X,Y\in F$

$X\in F\Rightarrow X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y-z=0$.

$Y\in F\Rightarrow Y=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3 / 2x'+y'-z'=0$.

$(\alpha X+\beta Y)\in F$??

$\alpha X+\beta Y=\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')$

$=(\underbrace{\alpha x+\beta x'}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\alpha y+\beta y'}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\alpha z+\beta z'}_{\in\mathbb{R}})\in\mathbb{R}^3$

$2(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')-(\alpha z+\beta z')$

$=2\alpha x+2\beta x'+\alpha y+\beta y'-\alpha z-\beta z'$

$=\alpha(\underline{2x+y-z})+\beta(\underline{2x'+y'-z'})$

$=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0$

$=0$

$\Rightarrow(\alpha X+\beta Y)\in F$

ومنه: F ف.ش.ج من $\mathbb{R}^3$.

2) ايجاد أساسا لكل من (محددا الأبعاد):

* $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y-z=0\}$.

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y=z\}$.

$X\in F\Rightarrow X=(x,y,z)$

$=(x,y,2x+y)$

$=(x,0,2x)+(0,y,y)$

$=x(\underbrace{1,0,2}_{u_1})+y(\underbrace{0,1,1}_{u_2})$.

اذن: u_1, u_2 يولدان F، ندرس الاستقلال الخطي لهما:

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ بحيث: $\alpha u_1+\beta u_2=0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow\alpha(1,0,2)+\beta(0,1,1)=(0,0,0)$

$\Rightarrow(\alpha,\beta,2\alpha+\beta)=(0,0,0)$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ 2\alpha+\beta=0\end{cases}\Rightarrow\alpha=0,\ \beta=0$

اذن: u_1, u_2 مستقلان خطيا فهما يشكلان أساسا لـ F و $\dim F=2$.

* $G=[\{(\underbrace{1,1,0}_{v_1}),(\underbrace{0,0,1}_{v_2}),(\underbrace{1,1,1}_{v_3})\}]$

v_1, v_2, v_3 تولد G ، ندرس الاستقلال الخطي لهذه الأشعة.

نلاحظ أن: $v_1+v_2=v_3$

اذن: ندرس الاستقلال الخطي لـ v_1, v_2

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ بحيث: $\alpha v_1+\beta v_2=0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow\alpha(1,1,0)+\beta(0,0,1)=(0,0,0)$

$\Rightarrow(\alpha,\alpha,\beta)=(0,0,0)$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \alpha=0\\ \beta=0\end{cases}\Rightarrow\alpha=0,\ \beta=0$

اذن: v_1, v_2 مستقلان خطيا فهما يشكلان أساسا لـ G و $\dim G=2$.

* $F+G=\{X\in\mathbb{R}^3 / X=X_1+X_2,\ X_1\in F\wedge X_2\in G\}$.

$=[\{(\underbrace{1,0,2}_{u_1}),(\underbrace{0,1,1}_{u_2}),(\underbrace{1,1,0}_{v_1}),(\underbrace{0,0,1}_{v_2}),(\underbrace{1,1,1}_{v_3})\}]$

$F+G=[\{u_1,u_2,v_1,v_2\}]$

نلاحظ أن: $u_1=v_1+3v_2-u_2$

اذن: ندرس الاستقلال الخطي لكل من: v_1, v_2, u_2

ليكن α, β, γ من $\mathbb{R}$ بحيث:

$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma u_2=0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow\alpha(1,1,0)+\beta(0,0,1)+\gamma(0,1,1)=(0,0,0)$

$\Rightarrow(\alpha,\alpha+\gamma,\beta+\gamma)=(0,0,0)$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \alpha+\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases}\quad\Rightarrow\gamma=0\quad\Rightarrow\beta=0$

اذن: v_1, v_2, u_2 مستقلة خطيا فهي تشكل أساسا لـ $(F+G)$ و $\dim(F+G)=3$.

* $F\cap G=\{X\in\mathbb{R}^3 / X\in F\wedge X\in G\}$.

$=\{X\in\mathbb{R}^3 / \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}: X=\alpha u_1+\beta u_2 \wedge \exists\alpha',\beta'\in\mathbb{R}: X=\alpha' v_1+\beta' v_2\}$.

$=\{X\in\mathbb{R}^3 / \exists\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathbb{R}: X=\alpha(1,0,2)+\beta(0,1,1)=\alpha'(1,1,0)+\beta'(0,0,1)\}$.

$\Rightarrow\{X\in\mathbb{R}^3 / \exists\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathbb{R}: X=(\alpha,\beta,2\alpha+\beta)=(\alpha',\alpha',\beta')\}$.

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\alpha'\\ \beta=\alpha'\\ 2\alpha+\beta=\beta'\end{cases}$

$\Rightarrow X=(\alpha,\beta,2\alpha+\beta)=(\alpha',\alpha',2\alpha'+\alpha')$

$=(\alpha',\alpha',3\alpha')=\alpha'(\underbrace{1,1,3}_{v})$

$\Rightarrow F\cap G=[\{(\underbrace{1,1,3}_{v})\}]$

اذن: $v=(1,1,3)$ يولد $(F\cap G)$ وهو مستقل خطيا فهو يشكل أساسا لـ $(F\cap G)$ و $\dim(F\cap G)=1$

3) هل $\mathbb{R}^3=F\oplus G$ ؟

$\mathbb{R}^3\overset{?}{=}F\oplus G\Leftrightarrow\begin{cases}① F+G=\mathbb{R}^3 & ?\\ ② F\cap G=\{0_{\mathbb{R}^3}\} & ?\end{cases}$

$F\cap G=[\{(1,1,3)\}]\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\Rightarrow F\oplus G\neq\mathbb{R}^3$.