التمرين 09 :

تذكير بالتعريف : لدينا $f: E \to F$ تطبيق خطي

- $\ker f$ (نواة f) $= \{x \in E : f(x) = 0_F\} \subset E$
- $\operatorname{Im} f$ (صورة f) $= \{y \in F, \exists x \in E : y = f(x)\} \subset F$
- $\ker f = \{0_E\} \Leftrightarrow$ f متباين
- $\operatorname{Im} f = F \Leftrightarrow$ f غامر.

- $f: \underset{=E}{\mathbb{R}^3} \to \underset{=F}{\mathbb{R}^4}$, $(x,y,z) \to f(x,y,z)$ تعيين نواة f $\ker f$

$$\ker f = \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = 0_{\mathbb{R}^4}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0,0)\}$$

بمعنى : $f(x,y,z) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$

$(x+z,\ x-y,\ z+y,\ x+y+2z) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+z=0 & \cdots\cdots (1) \\ x-y=0 & \cdots\cdots (2) \\ z+y=0 & \cdots\cdots (3) \\ x+y+2z=0 & \cdots (4) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow x = -z$

$(2) \Rightarrow y = x = -z$

إذاً :

$$\ker f = \{(x,y,z) : y = x = -z\}$$
$$= \{(-z,-z,z) ; z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{z(-1,-1,1) ; z \in \mathbb{R}\}.$$

ومنه : $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(0,0,0)\}$

وبالتالي : f ليس متباين.

• تعيين صورة f $(\mathrm{Im} f)$:

$$\mathrm{Im} f = \{ y \in F \, ; \, \exists x \in E : f(x) = y \}$$
$$= \{ y \in \mathbb{R}^4 ; \exists x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = y \}$$

$$\mathrm{Im} f = \{ (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4 ; \exists x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (x', y', z', t') \}$$

$$y \in \mathrm{Im} f \Rightarrow y = (x', y', z', t') = f(x, y, z)$$
$$\Rightarrow (x', y', z', t') = (x + z, x - y, z + y, x + y + 2z)$$
$$= (x, x, 0, x) + (0, -y, y, y) + (z, 0, z, 2z)$$
$$= x(1, 1, 0, 1) + y(0, -1, 1, 1) + z(1, 0, 1, 2)$$

ومنه صورة f $(\mathrm{Im} f)$ مولدة بمجموعة الأشعة $\{(1,1,0,1), (0,-1,1,1), (1,0,1,2)\}$

• ندرس الآن الاستقلال الخطي للأشعة :

ليكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha(1,1,0,1) + \beta(0,-1,1,1) + \gamma(1,0,1,2) = (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \quad \cdots\cdots (1) \\ \alpha - \beta = 0 \quad \cdots\cdots (2) \\ \beta + \gamma = 0 \quad \cdots\cdots (3) \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \quad \cdots\cdots (4) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \alpha = -\gamma$

$(2) \Rightarrow \beta = \alpha = -\gamma$

بالتعويض في (3) نجد : $-\gamma + \gamma = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$

وبالتالي الأشعة الثلاثة خطيا.

ندرس الاستقلال الخطي لشعاعين : نأخذ الشعاعين :

$\{(0,-1,1,1), (1,0,1,2)\}$

ليكن : $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(0,-1,1,1) + \beta(1,0,1,2) = (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ -\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \qquad \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

ومنه الشعاعين مستقلين خطيا.
إذا مجموعة الشعاعين $\{(0,-1,1,1),(1,0,1,2)\}$ تشكل أساس لـ $\mathrm{Im} f$
وبالتالي : $\dim \mathrm{Im} f = 2 \neq \dim F = \dim \mathbb{R}^4 = 4$
ومنه f ليس غامر.

التمرين 10 :

$$f : \underset{=E}{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}^3 = F$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$$

• تعيين نواة f :

$$\ker f = \{X \in \mathbb{R}^2 : f(X) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (0,0,0)\}.$$

• $f(x,y) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x+y, x-y, x+y) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \cdots (1) \\ x-y=0 \cdots (2) \\ x+y=0 \cdots (3) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$(2) \Rightarrow y = 0$

ومنه : $\ker f = \{(0,0)\}$

بما أن $\ker f = \{(0,0)\}$ إذا f متباين.

• تعيين صورة f :

$$\mathrm{Im} f = \{\overbrace{(x',y',z')}^{Y} \in \mathbb{R}^3 ; \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (x',y',z')\}$$

$$Y \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (x',y',z')$$
$$\Rightarrow (x',y',z') = (x+y, x-y, x+y)$$
$$= (x,x,x) + (y,-y,y)$$
$$= x(1,1,1) + y(1,-1,1)$$

يعني أن : الشعاعين $(1,-1,1)$ و $(1,1,1)$ يولدان الفضاء $\mathrm{Im} f$

• ندرس الاستقلال الخطي : ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$\alpha(1,1,1)+\beta(1,-1,1)=(0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha-\beta=0 \\ \alpha+\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=0$ (نفس الجملة السابقة)

ومنه الشعاعين مستقلين خطيا و بالتالي يشكلان أساس لـ $Im f$

$\Rightarrow \dim Im f = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3 = \dim F = 3$

نستنتج في الأخير ان f ليس غامر.

التمرين 11: لدينا الأساس القانوني التالي:

$\beta=\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$

ولدينا أيضا تطبيق خطي $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ حيث:

$f(e_1)=-2e_1+2e_3,\ f(e_2)=3e_2,\ f(e_3)=-4e_1+4e_3$

1% قبل تعيين أساس لنواة f $(\ker f)$ يجب أولا ايجاد صيغة التطبيق الخطي f.

بما أن β يشكل الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ اذن:

$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x,y,z)=xe_1+ye_2+ze_3$

$f(x,y,z)=f(xe_1+ye_2+ze_3)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)$ [f خطي]

$=x(-2e_1+2e_3)+y(3e_2)+z(-4e_1+4e_3)$

$=x[-2(1,0,0)+2(0,0,1)]+y[3(0,1,0)]+z[-4(1,0,0)+4(0,0,1)]$

$=(-2x,0,2x)+(0,3y,0)+(-4z,0,4z)$

$f(x,y,z)=(-2x-4z,\ 3y,\ 2x+4z).$

• ايجاد نواة f $(\ker f)$

$\ker f=\{X\in\mathbb{R}^3: f(X)=0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: f(x,y,z)=(0,0,0)\}$

$f(x,y,z)=(0,0,0) \Leftrightarrow (-2x-4z, 3y, 2x+4z)=(0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-4z=0 \Rightarrow x=-2z \\ 3y=0 \Rightarrow y=0 \\ 2x+4z=0 \end{cases}$$

$\ker f=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : y=0 , x=-2z\}$

$(x,y,z)\in \ker f \Rightarrow (x,y,z)=(-2z,0,z)=z(-2,0,1)$

يعني أن $\ker f$ مولدة بـ : $\{(-2,0,1)\}$ وهو مستقل خطيا ومنه

$\{(-2,0,1)\}$ تشكل أساس لـ : $\ker f$ وبالتالي $\dim \ker f = 1$

• f ليس متباين لأن $\ker f \neq \{(0,0,0)\}$

تذكير بنظرية البعد :

$f: E \to F$ تطبيق خطي

$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

• وجدنا أن $\dim \ker f = 1$ ولدينا حسب النظرية :

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

$\Leftrightarrow 3 = 1 + \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3$

وبالتالي f ليس غامر

2°/ إيجاد أساس لـ : صورة f $(\operatorname{Im} f)$:

$\operatorname{Im} f=\{\overbrace{(x',y',z')}^{Y} \in \mathbb{R}^3 ; \exists (x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=(x',y',z')\}$

$Y\in \operatorname{Im} f : (x',y',z')=f(x,y,z)$

$\Leftrightarrow (x',y',z')=(-2x-4z, 3y, 2x+4z)$

$(-2x-4z, 0, 2x+4z)+(0,3y,0)$

$=(2x+4z)(-1,0,1)+y(0,3,0)$

إذن المجموعة $\{(-1,0,1),(0,3,0)\}$ تولد Imf .

• ندرس الاستقلال الخطي: ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\alpha(-1,0,1)+\beta(0,3,0)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha=0\\ 3\beta=0\\ \alpha=0\end{cases}\Rightarrow \alpha=\beta=0$$

ومنه الشعاعان مستقلان خطيا وبالتالي مجموعة الشعاعين $\{(-1,0,1),(0,3,0)\}$ تشكل أساس لصورة f (Imf)

• رتبة f : $rang f = rg f$

$$rang f = rg f = \dim Im f = 2 .$$

<u>التمرين 4</u>: لدينا التطبيق الخطي $f:\underset{=E}{\mathbb{R}^4}\longrightarrow \mathbb{R}^3=F$

$$(x,y,s,t)\longrightarrow f(x,y,s,t)=(x-y+s+t,\ x+2s-t,\ x+y+3s-3t)$$

• إيجاد قاعدة (أساس) Imf وكذلك بعدها:

$$Imf=\{Y\in\mathbb{R}^3;\ \exists X\in\mathbb{R}^4 : Y=f(X)\}$$

$$=\{Y=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3;\ \exists X=(x,y,s,t)\in\mathbb{R}^4 : (x',y',z')=f(x,y,s,t)\}$$

$$Y\in Imf \Rightarrow Y=(x',y',z')=f(x,y,s,t)$$

$$=(x-y+s+t,\ x+2s-t,\ x+y+3s-3t)$$

$$=(x,x,x)+(-y,0,y)+(s,2s,3s)+(t,-t,-3t)$$

$$=x\underbrace{(1,1,1)}_{u_1}+y\underbrace{(-1,0,1)}_{u_2}+s\underbrace{(1,2,3)}_{u_3}+t\underbrace{(1,-1,-3)}_{u_4}$$

ومنه $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ تولد Imf

ندرس الآن الاستقلال الخطي: ليكن $\alpha,\beta,\gamma,\lambda\in\mathbb{R}$

$$\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3+\lambda u_4=0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)$$

$$\alpha(1,1,1)+\beta(-1,0,1)+\gamma(1,2,3)+\lambda(1,-1,-3)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+\gamma+\lambda=0 \cdots (1) \\ \alpha+2\gamma-\lambda=0 \cdots\cdots (2) \\ \alpha+\beta+3\gamma-3\lambda=0 \cdots (3) \end{cases}$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 2\alpha-\beta+3\gamma=0 \Rightarrow \beta=2\alpha+3\gamma$$

$$(2) \Rightarrow \lambda=\alpha+2\gamma$$

بالتعويض في (3) نجد :

$$\alpha+(2\alpha+3\gamma)+3\gamma-3(\alpha+2\gamma)=0 \Leftrightarrow 0=0$$

ومنه الأشعة مرتبطة خطيا.

ندرس الآن الاستقلال الخطي لثلاث أشعة u_1 ، u_2 ، u_3

(نلاحظ أن $u_4=-u_1-2u_2$ $\Leftarrow$ u_1,u_2,u_4 مرتبطة خطيا)

ليكن $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(1,1,1)+\beta(-1,0,1)+\gamma(1,2,3)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=0 \cdots (1) \\ \alpha+2\gamma=0 \cdots (2) \\ \alpha+\beta+3\gamma=0 \cdots (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \alpha=-2\gamma$$

$$(1) \Rightarrow -2\gamma-\beta+\gamma=0 \Rightarrow \beta=-\gamma$$

بالتعويض في (3) نجد :

$$-2\gamma-\gamma+3\gamma \Rightarrow 0=0$$

وبالتالي الأشعة u_1,u_2,u_3 مرتبطة خطيا.

نحاول الآن دراسة الاستقلال الخطي لشعاعين : نأخذ u_1,u_2

ليكن $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha u_1+\beta u_2=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \alpha(1,1,1)+\beta(-1,0,1)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=0 \\ \alpha=0 \\ \alpha+\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=0$$

ومنه الشعاعان u_1,u_2 مستقلان خطيا ومجموعة الشعاعين $\{u_1,u_2\}$ تشكل أساس لصورة f $(Im f)$ وبالتالي $\dim Im f=2$.

• إيجاد قاعدة (أساس) لنواة f $(\ker f)$ وكذلك بعدها:

$\ker f = \{X \in \mathbb{R}^4 : f(X) = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(x,y,s,t) \in \mathbb{R}^4 : f(x,y,s,t) = (0,0,0)\}$

لدينا: $f(x,y,s,t) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (x-y+s+t,\ x+2s-t,\ x+y+3s-3t) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y+s+t=0 \quad \cdots (1) \\ x+2s-t=0 \quad \cdots (2) \\ x+y+3s-3t=0 \quad \cdots (3) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow t = x+2s$

$(1) \Rightarrow x-y+s+x+2s=0 \Rightarrow 2x-y+3s=0 \Rightarrow y=2x+3s$

نتحقق أن: قيمتي t و y يحققان المعادلة (3)

$(3) \Rightarrow x+2x+3s+3s-3x-6s=0$

$\Rightarrow \ker f = \{(x,y,s,t) \in \mathbb{R}^4 : t=x+2s,\ y=2x+3s\}$

$X \in \ker f \Rightarrow X = (x,y,s,t) = (x, 2x+3s, s, x+2s)$

$= (x,2x,0,x) + (0,3s,s,2s) = x(1,2,0,1) + s(0,3,1,2)$

ومنه $\{(1,2,0,1),(0,3,1,2)\}$ تولد $\ker f$؛ ندرس الآن الاستقلال الخطي للشعاعين $(1,2,0,1),(0,3,1,2)$.

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha(1,2,0,1) + \beta(0,3,1,2) = 0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ 2\alpha+3\beta=0 \\ \beta=0 \\ \alpha+2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=0 \Rightarrow$$ الشعاعان مستقلان خطيا

ومنه المجموعة $\{(1,2,0,1),(0,3,1,2)\}$ تشكل أساس لنواة f $(\ker f)$

وبالتالي: $\dim \ker f = 2$.