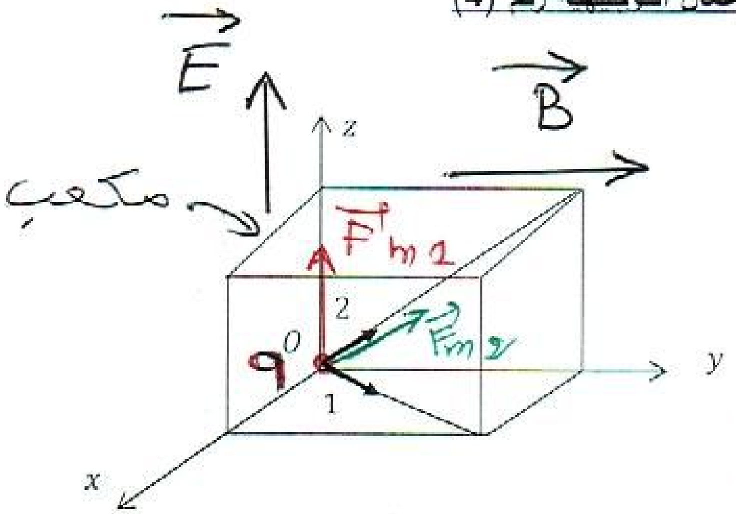
حل سلسلة الأعمال التوجيهية رقم (4)



الشكل 1

رسمت القوى باعتبار q موجبة

التمرين 1 :

1) ليكن حقل مغناطيسي منتظم موجه وفق (OY).

– أوجد القوة المغناطيسية $\vec{F_m}$ المؤثرة على الشحنة q المتحركة بسرعة $\vec{v}$ في الاتجاهين المبينين على الشكل 1.

2) بالإضافة إلى الحقل المغناطيسي، تخضع الشحنة إلى حقل كهربائي منتظم موجه وفق (OZ)، أوجد القوة المؤثرة على الشحنة q المتحركة بسرعة $\vec{v} = v\,\vec{i}$.

الحل:

الاتجاه ①- حساب $\vec{F}_{m_1}$:

$$\vec{F}_{m_1} = q\left(\vec{v}_1 \wedge \vec{B}\right)$$

$\vec{B} = B\,\vec{j}$ حقل منتظم موجه وفق (OY).

حسب الاتجاه ② (الشكل 1)

$$\vec{v}_1 = v\cos 45^\circ\,\vec{i} + v\sin 45^\circ\,\vec{j}$$

$$\Leftarrow \vec{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}v\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_{m_1} = q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}v\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\wedge B\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_{m_1} = q\frac{\sqrt{2}}{2}vB\left(\underbrace{\vec{i}\wedge\vec{j}}_{=\vec{k}} + \underbrace{\vec{j}\wedge\vec{j}}_{=\vec{0}}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{F}_{m_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}qvB\,\vec{k}}$$

$$\|\vec{F}_{m_1}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}|q|vB \quad (N)$$

الاتجاه ② :

$$\vec{F}_{m_2} = q\left(\vec{v}_2 \wedge \vec{B}\right)$$

$$\vec{v}_2 = v\cos 45^\circ\,\vec{j} + v\sin 45^\circ\,\vec{k}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}v\left(\vec{j}+\vec{k}\right)$$

$\vec{v} = v\vec{i}$

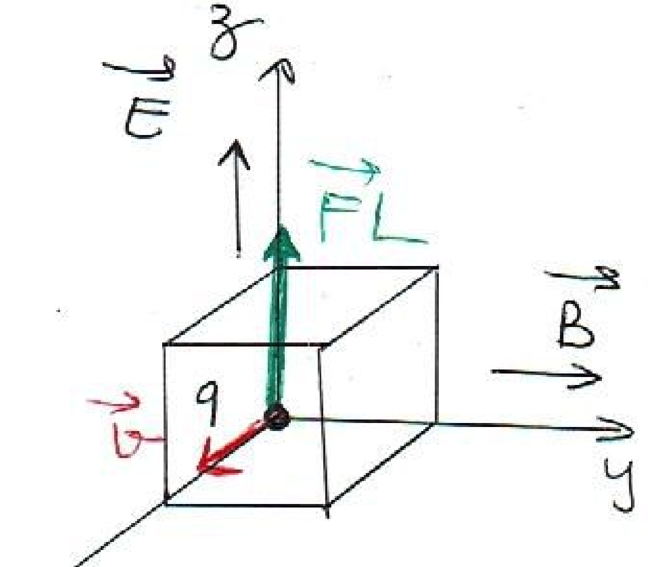
$\vec{F}_L = q\left(E\vec{k} + (v\vec{i} \wedge B\vec{j})\right)$

$\vec{F}_L = q\left(E\vec{k} + vB\underbrace{(\vec{i} \wedge \vec{j})}_{=\vec{k}}\right)$

$\vec{F}_L = q\left(E\vec{k} + vB\vec{k}\right)$

$\boxed{\vec{F}_L = q\left(E + vB\right)\vec{k}}$

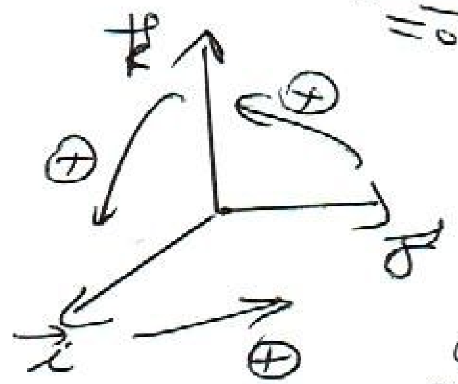
$\|\vec{F}_L\| = |q|\left(E + vB\right)$ (N)



نعتبر $q>0$

$\vec{F}_{m_2} = q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}v(\vec{j}+\vec{k}) \wedge B\vec{j}\right)$

$\vec{F}_{m_2} = q\frac{\sqrt{2}}{2}vB\left(\underbrace{\vec{j}\wedge\vec{j}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{k}\wedge\vec{j}}_{=-\vec{i}}\right)$



دوران عكس عقارب الساعة.

$\boxed{\vec{F}_{m_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}qvB\vec{i}}$

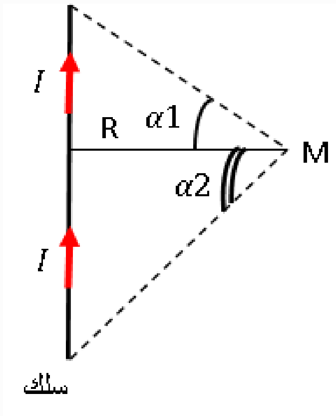
$\|\vec{F}_{m_2}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}|q|vB$ (N)

② تخضع الشحنة q إلى حقل مغناطيسي $\vec{B} = B\vec{j}$ وحقل كهربائي منتظم موجه وفق (Oz) :

$\vec{E} = E\vec{k}$

$\vec{F}_L$ = قوة لورانتز

$\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$



حل سلسلة الأعمال التوجيهية رقم (4) - تابع

التمرين 2 :

1) بين أن الحقل المغناطيسي الناتج عن جزء من سلك ناقل يمر به تيار شدته I يكتب كما يلي:

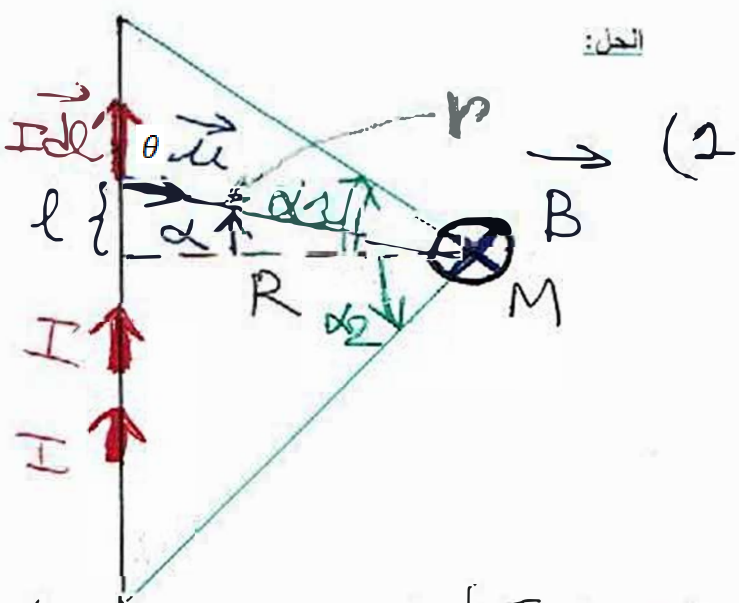
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$

حيث R المسافة بين النقطة المعتبرة والسلك، α_1 و α_2 الزاويتان المحددتان لشكل السلك بالنسبة لهذه النقطة.

2) استنتج الحقل المغناطيسي الناتج عن سلك لا نهائي الطول.

الحل:

(1



حسب قانون بيو وسفار:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\vec{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}$$

μ_0 : نفاذية الفراغ

I : شدة التيار المارة في السلك.

$\vec{dl}$: طول عنصري من السلك

$\vec{u}$: شعاع الواحدة المتعلق بالبعد r.

r : البعد بين $I\vec{dl}$ والنقطة M التي نحسب فيها الحقل $\vec{B}$.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\,dl\,u\sin\theta}{r^2}$$

$$tg\alpha = \frac{l}{R} \Rightarrow l = R\,tg\alpha$$

$$dl = \frac{R\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\|\vec{u}\| = u = 1$$

لدينا: $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$

$$\sin\theta = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \cos\alpha$$

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\;R\,d\alpha\,\cancel{\cos\alpha}}{r^2\cos^{\cancel{2}}\alpha}$$

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\;R\,d\alpha}{r^2\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha=\frac{R}{r}\Rightarrow r=\frac{R}{\cos\alpha}$$

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\;\cancel{R}\,d\alpha}{\frac{R^{\cancel{2}}}{\cos^2\alpha}\,\cancel{\cos\alpha}}$$

$$dB=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cos\alpha\,d\alpha$$

$$B=\int dB=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\cos\alpha\,d\alpha$$

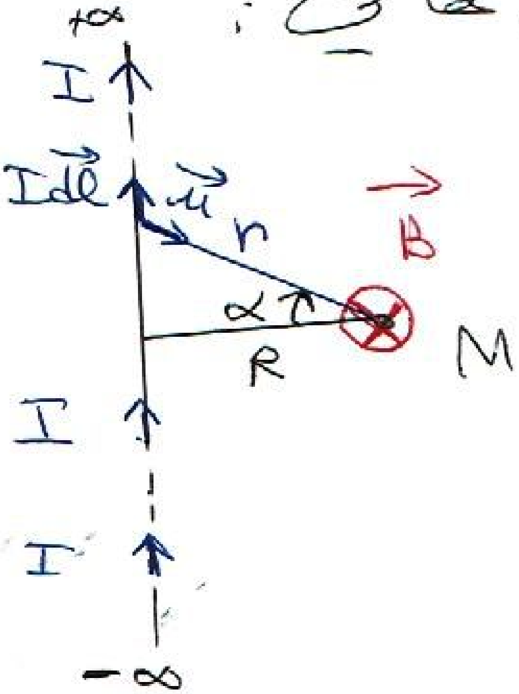
$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\sin\alpha\right)_{\alpha_2}^{\alpha_1}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2\right)$$

وهو المطلوب

② استنتاج الحقل المغناطيسي الناتج عن سلك لانهائي :

في حالة السلك اللانهائي :

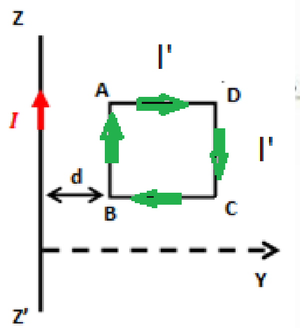


$$\Leftarrow\begin{cases}\frac{\pi}{2}=\alpha_1\\ -\frac{\pi}{2}=\alpha_2\end{cases}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\Big(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}-\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1}\Big)$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\big(1-(-1)\big)$$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$$



حل سلسلة الأعمال التوجيهية رقم (4) – تابع

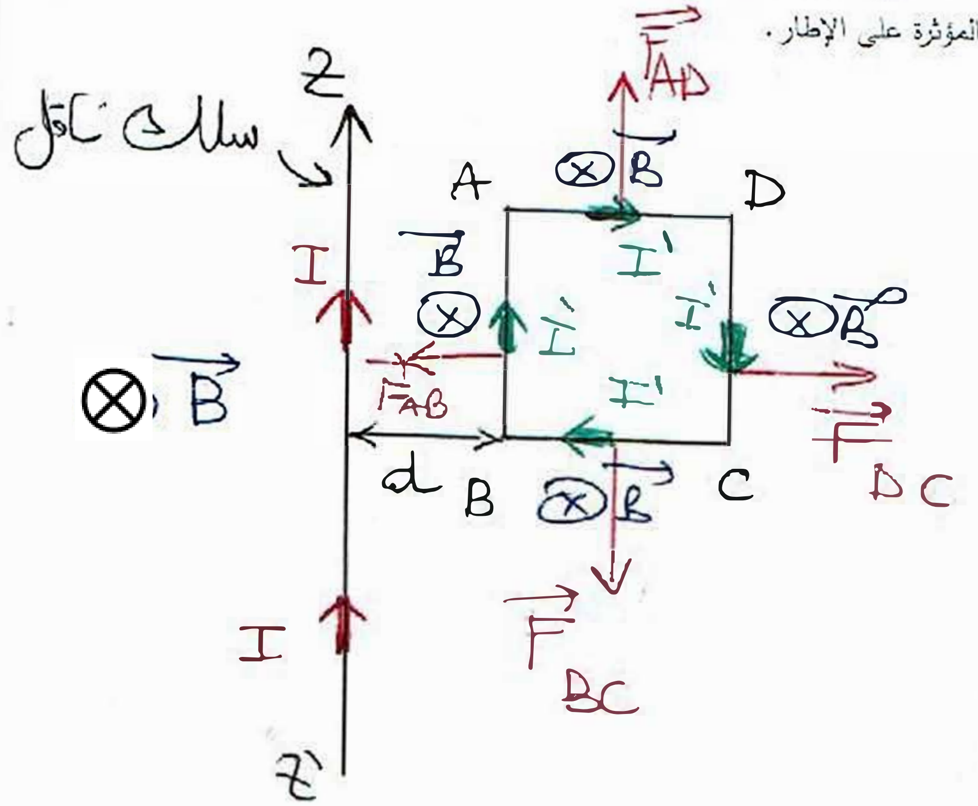
التمرين 3 :

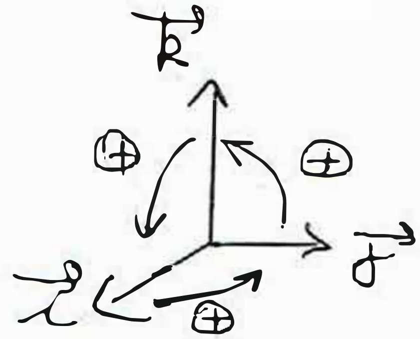
يمر تيار كهربائي شدته I بسلك لا نهائي الطول ZZ'.

في المستوي الحاوي للسلك نضع إطار مربع الشكل $ABCD$ طول ضلعه a ويمر به تيار شدته I'. الضلعان AB و CD يوازيان ZZ' والمسافة الفاصلة بين AB و ZZ' هي d.

- احسب محصلة القوى $\vec{R}$ المؤثرة على الإطار.

الحل:





$$\begin{cases} \vec i \wedge \vec j = \vec k \\ \vec j \wedge \vec k = \vec i \\ \vec k \wedge \vec i = \vec j \end{cases}$$

- لحساب محصلة القوى $\vec R$ المؤثرة على الإطار نحسب القوة مؤثرة على كل ضلع من أضلاع المربع.

الإطار موجودة (خاضع) لحقل مغناطيسي $\vec B$ ناتج عن السلك اللانهائي (ZZ') وهو $\vec B$

$$\vec B = -B\vec i = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec i$$

r : بعد النقطة (المراد حساب فيها $\vec B$) عن السلك (ZZ').

أ) القوة المؤثرة على الضلع AB :

$$\boxed{\vec{dF} = I\,\vec{dl}\wedge\vec{B}}$$

قوة لابلاس

التيار المار بالإطار هو I' :

$$\vec{dl} = dz\,\vec{k}$$

$$\vec{dF}_{AB} = I'\,dz\,\vec{k}\wedge(-B\vec{i})$$

$$\vec{dF}_{AB} = -I'B\,dz\,\underbrace{(\vec{k}\wedge\vec{i})}_{=\vec{j}}$$

$$\vec{dF}_{AB} = -I'B\,dz\,\vec{j}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}}$$

الحقل المؤثر على الضلع AB

$$\vec{dF}_{AB} = -I'\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\,dz\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_{AB} = \int \vec{dF}_{AB} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{AB} = -\int_0^a I'\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\,dz\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_{AB} = -\frac{\mu_0 I I'}{2\pi d}\vec{j}\int_0^a dz$$

$$\vec{F}_{AB} = -\frac{\mu_0 I I'}{2\pi d}\vec{j}\,(z)_0^a$$

$$\boxed{\vec{F}_{AB} = -\frac{\mu_0 I I'}{2\pi d}\,a\,\vec{j}}$$

$\vec{F}_{AB}$ عمودية على الضلع AB

ب) القوة المؤثرة على :(DC)

$$\vec{dF}_{DC} = I'\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$$

$$\vec{dl} = -dz\,\vec{k}$$

$$\vec{dF}_{DC} = -I'\,dz\,\vec{k}\wedge(-B\vec{i})$$

$$\vec{dF}_{DC} = +I'B\,dz\,\underbrace{(\vec{k}\wedge\vec{i})}$$

$$\vec{dF}_{DC} = I'B\,dz\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{dF}_{AD} = I'\left(dy\,\vec{j} \wedge B\,\vec{i}\right)$$

$$\overrightarrow{dF}_{A} = -I'\,dy\,B\,\underbrace{\left(\vec{j} \wedge \vec{i}\right)}_{= -\vec{k}}$$

$$\overrightarrow{dF}_{AD} = +I'\,dy\,B\,\vec{k}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}}$$

الحقل المغناطيسي المؤثر على الضلع AD.

$$\overrightarrow{dF}_{AD} = I'\,dy\,\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\,\vec{k}$$

$$\int \overrightarrow{dF}_{AD} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi}\,\vec{k}\int_{d}^{d+a}\frac{dy}{y}$$

$$\vec{F}_{AD} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi}\,\vec{k}\left(\ln y\right)_{d}^{d+a}$$

$$\vec{F}_{AD} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi}\,\vec{k}\left(\ln\frac{d+a}{d}\right)$$

$\vec{F}_{AD} \perp$ ضلع (AD).

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+a)}}$$

الحقل المؤثر على الضلع (DC).

$$\overrightarrow{dF}_{DC} = I'\,\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+a)}\,dz\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_{DC} = \int \overrightarrow{dF}_{DC} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi(d+a)}\,\vec{j}\int_0^a dz$$

$$\vec{F}_{DC} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi(d+a)}\,a\,\vec{j}$$

$\vec{F}_{DC}$ عمودية على الضلع (DC).

ج) القوة المؤثرة على الضلع (AD):

$$\overrightarrow{dF}_{AD} = I'\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{dl} = dy\,\vec{j}$$

د) القوة المؤثرة على (BC).

$$\vec{dF}_{BC} = I'\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$$

$$\vec{dl} = -dy\,\vec{j}$$

الحقل عند الضلع (BC).

$$\boxed{\vec{B} = -B\,\vec{i} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}}$$

$$\vec{dF}_{BC} = I'(-dy\,\vec{j})\wedge(-B\,\vec{i})$$

$$\vec{dF}_{BC} = I'B\,dy\,(\underbrace{\vec{j}\wedge\vec{i}}_{-\vec{k}})$$

$$\vec{dF}_{BC} = -I'\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\vec{k}\,dy$$

$$\int\vec{dF}_{BC} = \int_{d}^{d+a}\frac{-\mu_0 I I'}{2\pi y}dy\,\vec{k}$$

$$\vec{F}_{BC} = \frac{-\mu_0 I I'}{2\pi}\vec{k}\int_{d}^{d+a}\frac{dy}{y}$$

$$\vec{F}_{BC} = \frac{-\mu_0 I I'}{2\pi}\vec{k}\,(\ln y)_{d}^{d+a}$$

$$\vec{F}_{BC} = -\frac{\mu_0 I I'}{2\pi}\vec{k}\left(\ln\frac{d+a}{d}\right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{BC} = \frac{-\mu_0 I I'}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\vec{k}}$$

$\vec{F}_{BC} \perp$ الضلع (BC).

* حساب محصلة القوى $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \vec{F}_{AB}+\vec{F}_{DC}+\cancel{\vec{F}_{AD}}+\cancel{\vec{F}_{BC}}$$

$$\vec{R} = -\frac{\mu_0 I I'}{2\pi d}a\,\vec{j} + \frac{\mu_0 I I'}{2\pi(d+a)}a\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{R} = \frac{-\mu_0 I I' a^2}{2\pi d(d+a)}\vec{j}}$$

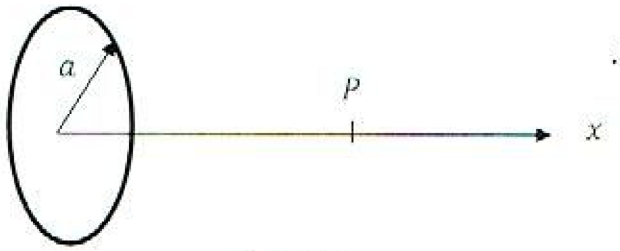
حل سلسلة الأعمال التوجيهية رقم (4) – تابع

التمرين 4 :

- احسب الحقل المغناطيسي الناشئ عن حلقة دائرية نصف قطرها a و يمر بها تيار شدته I:

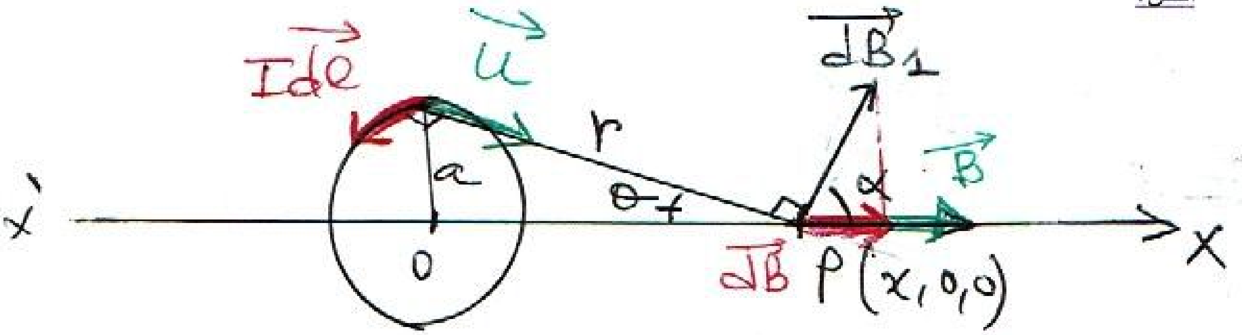
1) عند نقطة P تقع على محورها.

2) استنتج الحقل المغناطيسي في مركز الحلقة.



الشكل 4

الحل:



- حساب الحقل المغناطيسي الناتج عن حلقة عند P:

يعطى الحقل المغناطيسي بقانون بيو وسفار:

$$\boxed{\vec{dB_1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I\vec{dl}\wedge\vec{u})}{r^2}}$$

$\vec{dB_1}$ عند P.

$\vec{u}$: شعاع الواحدة المتعلق بـ r.

$\|\vec{u}\| = 1$

r: بعد $\vec{dl}$ عن P

$\vec{dl}$: عنصر الطول من الحلقة التي يمر فيها تيار I.

$\vec{dB_1}$ عمودي على $\vec{u}$
و عمودي على $\vec{dl}$

$\vec{dl} \perp \vec{u}$

$$\boxed{dB_1 = \frac{\mu_0 I\, dl}{4\pi r^2}}$$

بفعل التناظر للحلقة يكون $\vec{B}$ منطبق عن المحور (OX).
يعني في اتجاه محور الحلقة.

لذلك نقوم بإسقاط $d\vec{B}_1$ على (OX):

$$dB = dB_1 \cos\alpha$$

$$dB = \frac{\mu_0 I \, dl \cos\alpha}{4\pi r^2}$$

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{dl \cos\alpha}{r^2}\right)$$

$$r^2 = a^2 + x^2$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\cos\alpha = \sin\theta = \frac{a}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$B = \int \frac{\mu_0 I \, dl \, a}{4\pi (a^2 + x^2)\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)}$$

$$B = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi a} dl$$

$$B = \frac{\mu_0 I a}{{}_2\cancel{4\pi}(a^2 + x^2)^{3/2}}\left(\cancel{2\pi} a\right)$$

$$B_P = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2 + x^2)^{3/2}}$$

الحقل المغناطيسي عند النقطة P من محور حلقة يمر فيها تيار I.

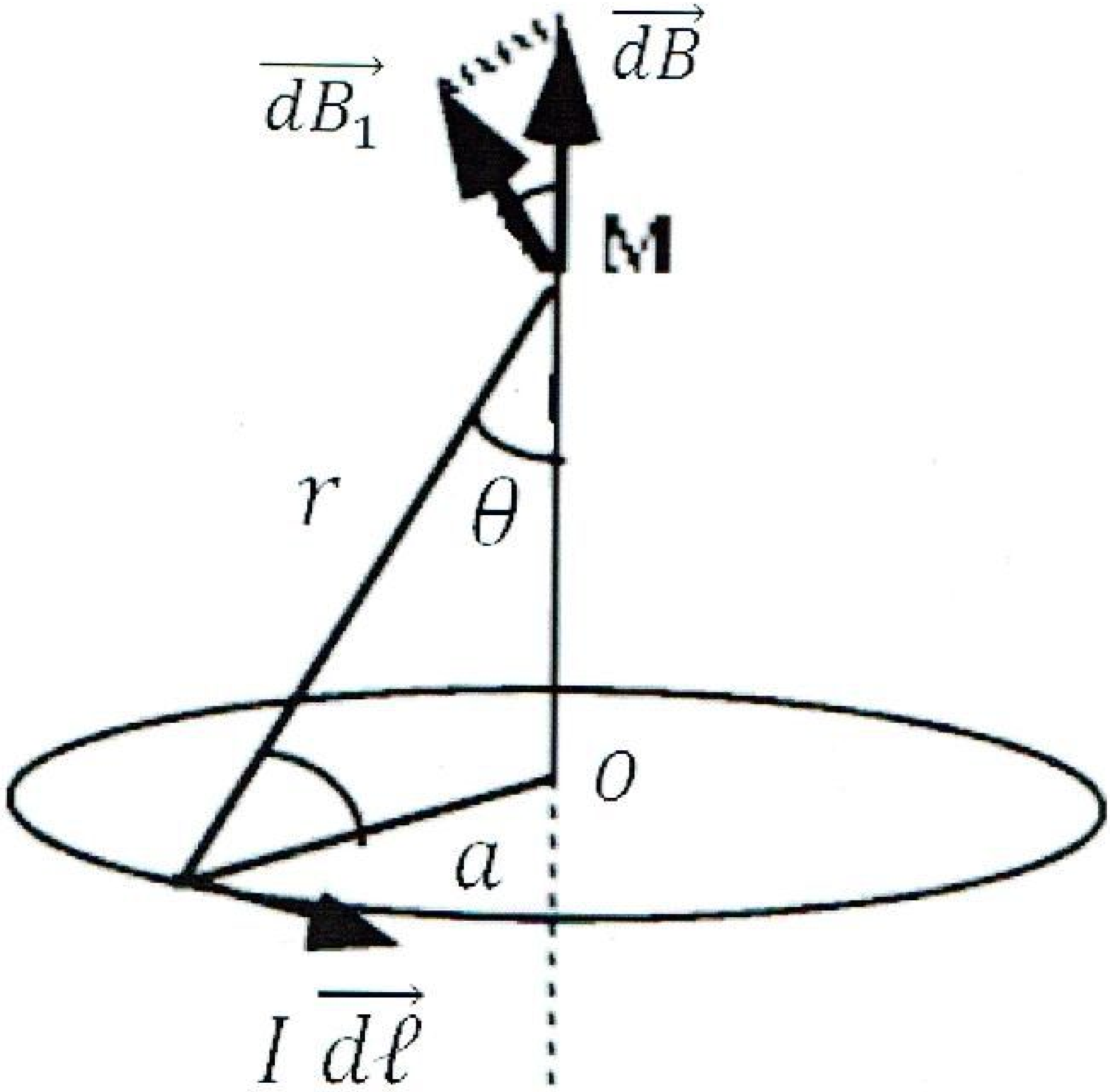
2) استنتاج B عند "O":

مركز الحلقة هو المبدأ "O"

$$x = 0 \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2 + 0)^{3/2}}$$

$$\boxed{B_0 = \frac{\mu_0 I}{2a}}$$



الحقل المغناطيسي الناتج عن حلقة يعبرها تيار