التمرين 04: $\mathbb{R}^3$ ف.ش على الحقل $\mathbb{R}$.

ليكن ف.ش.ج $G=[\{(1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}]$

ولتكن المجموعة F المعرفة كما يلي:

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y-z=0\}.$$

1) نبين أن: F ف.ش.ج من $\mathbb{R}^3$:

نعلم أن شروط ف.ش.ج هي:

F ف.ش.ج من E اذا تحقق:

① $\emptyset\neq F\subset E$

② $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\forall X,Y\in F:(\alpha X+\beta Y)\in F$

① ⊛ $F\subset\mathbb{R}^3$ (من تعريف المجموعة F).

⊛ $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3/2.0+0-0=0$ العنصر الحيادي لـ $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow(0,0,0)\in F\Rightarrow F\neq\emptyset$

② ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$، $X,Y\in F$

$X\in F\Rightarrow X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/2x+y-z=0.$

$Y\in F\Rightarrow Y=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3/2x'+y'-z'=0.$

$(\alpha X+\beta Y)\in F$??

$$\alpha X+\beta Y=\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')$$
$$=(\underbrace{\alpha x+\beta x'}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha y+\beta y'}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha z+\beta z'}_{\in\mathbb{R}})\in\mathbb{R}^3$$

(لكي يكون العنصر $(\alpha X+\beta Y)\in F$ يجب أن يحقق شروط المجموعة F)

$$2(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')-(\alpha z+\beta z')$$

(3)
$$=2\alpha x+2\beta x'+\alpha y+\beta y'-\alpha z-\beta z'$$
$$=\alpha\underbrace{(2x+y-z)}_{0}+\beta\underbrace{(2x'+y'-z')}_{0}$$
$$=\alpha\cdot0+\beta\cdot0=0$$
$$\Rightarrow(\alpha X+\beta Y)\in F$$

ومنه: F ف.ش.ج من $\mathbb{R}^3$

ج) ايجاد أساسا لكل من (محدد الابعاد) :

تذكير أن : نسمي أساسا لفضاء شعاعي كل مجموعة مولدة لهذا الفضاء ومستقلة خطيا.

وبعد فضاء شعاعي هو عدد عناصر أساس هذا الفضاء . $(\dim E)$

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y-z=0\}.$$

لكي نجد أساسا لـ ف.ش F يجب أن نجد مجموعة مولدة لـ F ومستقلة خطيا.

$$\Rightarrow F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y=z\}.$$

نلاحظ أن : عناصر المجموعة (ف.ش) F هي ثلاثيات من $\mathbb{R}^3$ بحيث : المركبة $3 = (2$ المركبة$) + (1$ المركبة$)\,2.$

اذن : كل عنصر $X=(x,y,z)$ من F

$$X\in F \Rightarrow X=(x,y,z)$$

نكتب هذه الثلاثية الى مجموع ثلاثيتين أحدهما بدلالة x والثانية بدلالة y

$$=(x,y,2x+y)$$
$$=(x,0,2x)+(0,y,y)$$
$$=x\underbrace{(1,0,2)}_{u_1}+y\underbrace{(0,1,1)}_{u_2}$$

x عدد حقيقي

y عدد حقيقي

وجدنا كل عنصر X من F يكتب من الشكل :

عدد حقيقي (x) في شعاع u_1 + عدد حقيقي (y) في شعاع u_2

اذن : u_1 ، u_2 يولدان F.

وجدنا جملة $\{u_1, u_2\}$ تولد F ، ندرس استقلالها الخطي :

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ بحيث : $\alpha u_1+\beta u_2=0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow \alpha(1,0,2)+\beta(0,1,1)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha,\beta,2\alpha+\beta)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ 2\alpha+\beta=0\end{cases} \Rightarrow \alpha=0,\ \beta=0.$$

اذن : u_1, u_2 مستقلان خطيا فهما يشكلان أساسا لـ F .

أي : الجملة $\{u_1,u_2\}$ أساس لـ F و $\dim F=2$

ملاحظة : لاحظ أنه من تعريف المجموعة F

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y=z\}$$

استخدمنا كتابة z بدلالة x و y , $(z=2x+y)$

يمكننا أيضا استخدام كتابة y بدلالة x و z $(y=z-2x)$

أو كتابة ~~x~~ بدلالة y و z $(x=\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}y)$

وفي كل حالة يمكننا ايجاد أساسا آخر لـ F .

مع العلم أن كل فضاء شعاعي له أساسا قانونيا واحد وعدة أسس (كل جملة مولدة ومستقلة فهي تشكل أساسا).

الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ هو : $\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$.

لأن : كل عنصر من $\mathbb{R}^3$

$$(x,y,z)=x\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}+y\underbrace{(0,1,0)}_{e_2}+z\underbrace{(0,0,1)}_{e_3}$$

مثلا :

5 $(2,3,4)=2e_1+3e_2+4e_3$

* $G = \left[\left\{ \underbrace{(1,1,0)}_{V_1}, \underbrace{(0,0,1)}_{V_2}, \underbrace{(1,1,1)}_{V_3} \right\}\right]$

بالنسبة ل ف. ش. ج G فهو مولد ب V_1, V_2, V_3.
أي $\{V_1, V_2, V_3\}$ تولد G ، اذن بقي ندرس الاستقلال الخطي ل V_1, V_2, V_3.

نلاحظ أن : $V_1+V_2=V_3$ أي الجملة مرتبطة خطيا
اذن : ندرس الاستقلال الخطي ل V_1, V_2.
ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ بحيث :

$$\alpha V_1 + \beta V_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$$
$$\Rightarrow \alpha(1,1,0) + \beta(0,0,1) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow (\alpha, \alpha, \beta) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

اذن : V_1, V_2 مستقلان خطيا فهما يشكلان أساسا ل G.
أي : $\{V_1, V_2\}$ أساس ل G و $\dim G = 2$.

* $F+G = \{ X \in \mathbb{R}^3 / X = X_1 + X_2 \ , \ X_1 \in F \wedge X_2 \in G \}$

$= \{ X \in \mathbb{R}^3 / \exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} :$
$X = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_1 V_1 + \beta_2 V_2 + \beta_3 V_3 \}$

$(V_1 + V_2 = V_3)$

$= \{ X \in \mathbb{R}^3 / \exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} :$
$X = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_1 V_1 + \beta_2 V_2 + \beta_3 (V_1 + V_2) \}$

ونلاحظ أيضا : $u_1 = V_1 + 3V_2 - u_2$

$= \{ X \in \mathbb{R}^3 / \exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} :$
$X = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + (\beta_1 + \beta_3) V_1 + (\beta_2 + \beta_3) V_2 \}$

$= \{ X \in \mathbb{R}^3 / \exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} :$
$X = \alpha_1 (V_1 + 3V_2 - u_2) + \alpha_2 u_2 + (\beta_1 + \beta_3) V_1 + (\beta_2 + \beta_3) V_2 \}$

$= \{ X \in \mathbb{R}^3 / \exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} :$
$X = (-\alpha_1 + \alpha_2) u_2 + (\alpha_1 + \beta_1 + \beta_3) V_1 + (3\alpha_1 + \beta_2 + \beta_3) V_2 \}$

$\Rightarrow F+G=[\{u_2, v_1, v_2\}]$

أو نستطيع الكتابة المباشرة :

$$F+G=\{X\in\mathbb{R}^3 / X=X_1+X_2 \ , \ X_1\in F \wedge X_2\in G\}$$

أي نأخذ عناصر F و G

$$\Rightarrow \ =[\{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}]$$

نلاحظ أن : $v_1+v_2=v_3$ و $u_1=v_1+3v_2-u_2$

$$\Rightarrow F+G=[\{u_2, v_1, v_2\}]$$

اذن : u_2 ، v_1 ، v_2 تولد $(F+G)$ ، ندرس الاستقلال الخطي لها

ليكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ بحيث :

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma u_2=0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \alpha(1,1,0)+\beta(0,0,1)+\gamma(0,1,1)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha, \alpha+\gamma, \beta+\gamma)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \alpha+\gamma=0 & \Rightarrow \gamma=0\\ \beta+\gamma=0 & \Rightarrow \beta=0\end{cases}$$

اذن : v_1 ، v_2 ، u_2 مستقلة خطيا ومنه تشكل أساس لـ $(F+G)$

أي : $\{v_1, v_2, u_2\}$ أساس لـ $(F+G)$ و $\dim(F+G)=3$

$$\circledast \ F\cap G=\{X\in\mathbb{R}^3 / X\in F \wedge X\in G\}.$$

$$=\{X\in\mathbb{R}^3 / \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R} : X=\alpha u_1+\beta u_2 \ \wedge \ \exists \alpha',\beta'\in\mathbb{R} : X=\alpha' v_1+\beta' v_2\}.$$

$$=\{X\in\mathbb{R}^3 / \exists \alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathbb{R} : X=\alpha(1,0,2)+\beta(0,1,1)=\alpha'(1,1,0)+\beta'(0,0,1)\}.$$

7

$$=\{X\in\mathbb{R}^3 / \exists \alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathbb{R} : X=(\alpha,\beta,2\alpha+\beta)=(\alpha',\beta',\beta')\}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=\alpha'\\ \beta=\beta'\\ 2\alpha+\beta=\beta'\end{cases}$$

$\Rightarrow X = (\alpha, \beta, 2\alpha+\beta) = (\alpha', \alpha', 2\alpha'+\alpha') = (\alpha', \alpha', 3\alpha') = \alpha'(1,1,3)$

وجدنا كل X من التقاطع $(F \cap G)$ يكتب من الشكل عدد حقيقي α في شعاع

أي :

$\Rightarrow F \cap G = [\{(1,1,3)\}]$

اذن : $V = (1,1,3)$ يولد $(F \cap G)$ وهو مستقل خطيا فهو يشكل

أساسا لـ $(F \cap G)$ و $\dim(F \cap G) = 1$.

3) هل $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ ؟؟

E ف.ش على $\mathbb{K}$، F، G ف.ش.ج من E

يكون $E = F \oplus G$

جمع مباشر

إذا تحقق $\left\{ \begin{array}{l} E = F + G \quad ① \\ F \cap G = \{0_E\} \quad ② \end{array} \right.$

* لاثبات : $E = F + G$ نثبت ان : $E \subset F + G$

و $F + G \subset E$

أو يمكن اثبات أحد الاحتواء بين

مع $\dim E = \dim(F+G)$

* نفس الشيء بالنسبة لـ $F \cap G = \{0_E\}$

حيث : 0_E هو العنصر الحيادي لـ E بالنسبة للعملية الأولى $(+)$

لدينا من السؤال السابق :

$F \cap G = [\{(1,1,3)\}] \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

ومنه : $\mathbb{R}^3 \neq F \oplus G$.