التمرين 03 (من السلسلة 2 2019/2020) : ليكن $\mathbb{R}_2[X]$ ف. كثيرات الحدود ذات الدرجة أقل أو تساوي 2 . ولتكن الجملة $\mathcal{F}=\{P_1,P_2,P_3\}$ حيث :

$$P_1(X)=X^2,\ P_2(X)=(X-1)^2,\ P_3(X)=(X+1)^2$$

أ- نبين أن $\mathcal{F}$ تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}_2[X]$:

نقول عن جملة $\mathcal{F}$ تشكل أساسا للفضاء شعاعي E إذا تحقق :

① $\mathcal{F}$ مولدة لـ E.

② $\mathcal{F}$ مستقلة خطيا

• ملاحظة : إذا كان $\underset{\text{عدد عناصر}}{\text{card}}\,\mathcal{F}=\dim E$ فإنه لإثبات أن $\mathcal{F}$ تشكل أساسا لـ E يكفي إثبات أحد الشرطين

$\dim \mathbb{R}_2[X]=3$ لأن كل كثير حدود ينتمي إلى $\mathbb{R}_2[X]$ يكتب على الشكل : $P(X)=aX^2+bX+c\cdot 1$ و $\{X^2,X,1\}$ أساس قانوني لـ $\mathbb{R}_2[X]$

بما أن : $\text{card}\,\mathcal{F}=3=\dim \mathbb{R}_2[X]$

فإنه : يكفي إثبات أحد الشرطين

إذن : نثبت أن الجملة $\mathcal{F}$ مستقلة خطيا

ليكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ بحيث :

$$\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3=0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

العنصر الحيادي للفضاء $\mathbb{R}_2[X]$

$$\Rightarrow \alpha X^2+\beta(X-1)^2+\gamma(X+1)^2=0$$

$0_{\mathbb{R}_2[X]}=0X^2+0X+0$

$$\Rightarrow \alpha X^2+\beta(X^2-2X+1)+\gamma(X^2+2X+1)=0$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)X^2+(-2\beta+2\gamma)X+\beta+\gamma=0X^2+0X+0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0 & \text{—— (1)}\\ -2\beta+2\gamma=0 & \text{—— (2)}\\ \beta+\gamma=0 & \text{—— (3)}\end{cases}$$

1

$(3)\Rightarrow \beta=-\gamma.$

$(2)\Rightarrow -2(-\gamma)+2\gamma=0 \Rightarrow 4\gamma=0\Rightarrow \gamma=0$

$\beta = -\gamma = -0 \Rightarrow \beta = 0.$

$(1) \Rightarrow \alpha = -\beta - \gamma = -0 - 0 \Rightarrow \alpha = 0$

ومنه: الجملة $\mathcal{F}$ مستقلة خطيا فهي تشكل أساسا لـ $\mathbb{P}_2[X]$.

ب- استنتاج كتابة كثير الحدود $Q(X)=12$ في هذا الأساس:

$P(X) \in \mathbb{P}_2[X]$

$\Rightarrow P(X) = aX^2 + bX + c \cdot 1$

نسمي $\{X^2, X, 1\}$ أساسا قانونيا لـ $\mathbb{P}_2[X]$

اذن: $Q(X) = 12 = 0X^2 + 0X + 12 \cdot 1$

أي: $Q(X)=12$ مكتوب بالنسبة للأساس القانوني

اذن: استنتاج كتابة كثير الحدود $Q(X) = 12$ في الأساس $\mathcal{F}$ هو ايجاد α, β, γ التي تحقق:

$$Q(X) = \alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma P_3(X)$$

$$= \alpha X^2 + \beta (X-1)^2 + \gamma (X+1)^2$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (-2\beta+2\gamma)X + \beta + \gamma$$

ولدينا: $Q(X) = 12 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ -2\beta+2\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 12 \end{cases}$$

بعد حل الجملة نجد: $\alpha = -12, \beta = \gamma = 6$

ومنه: $Q(X) = -12P_1(X) + 6P_2(X) + 6P_3(X)$ هو كتابة كثير الحدود $Q(X)=12$ في الأساس $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, P_3\}$.

2