Université Mohamed Khider Biskra — **Probabilités**
Faculté des FSENV — **$2^{ème}$ Année.**
Département de Mathématiques — **2015/2016.**
06/06/2016

Epreuve de Rattrapage

Exercice-§1

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ $n-$événements de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cup_{j=1}^n A_j) &= \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j) - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}) \\ &+ ... + (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<i_2,<i_3<,...,<i_k\leq n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap ...\cap A_{i_k}) \\ &+ .... + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_n). \end{aligned}$$

Exercice-§2

(1) Si $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'événements de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\cup_{n\geq 1} A_n = A$. Montrer que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
(2) Si $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante d'événements de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\cap_{n\geq 1} A_n = B$. Montrer que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\cap_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
(3) Si $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que si $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0.$$

Exercice-§3

Une urne $\mathbb{U}_1$ contient a_1 boules rouges et a_2 boules noires, une autre urne $\mathbb{U}_2$ contient b_1 boules rouges et b_2 boules noires. On tire une boule de $\mathbb{U}_1$ et on la met dans $\mathbb{U}_2$, on désing par $\boldsymbol{A}$ l'evenement "*la boule tirée de* $\mathbb{U}_1$ *est rouge*" et par $\boldsymbol{B}$ l'evenement "*la boule tirée de* $\mathbb{U}_2$ *est rouge*" et par $\overline{\boldsymbol{A}}$ et $\overline{\boldsymbol{B}}$ les évenements contriares.
(1) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(\boldsymbol{A}), \mathbb{P}(\overline{\boldsymbol{A}}), \mathbb{P}(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{A}), \mathbb{P}(\boldsymbol{B} \mid \overline{\boldsymbol{A}})$.
(2) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(\boldsymbol{B}), \mathbb{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}), \mathbb{P}(\overline{\boldsymbol{A}} \mid \boldsymbol{B})$.

Exercice-§4

(I) Soit X une variable aleatoire suit la loi Hypergéometrique $\mathcal{H}(n, a, b)$: $N = a + b$

$$X \in \{\sup(0, n-p), ..., \inf(a, n)\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_N^n},$$

Montrer que si $N \to +\infty$ et $\dfrac{a}{N}$ et $\dfrac{b}{N}$ restent fixés alors $\lim_{N\to+\infty} \mathcal{H}(n, a, b) = \mathcal{B}(n, \frac{a}{N})$.
(II) Soit X une variable aleatoire vérifiant $a > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{\mathbb{P}[X = n]}{\mathbb{P}[X = n-1]} = \frac{a}{n}.$$

(1) Exprimer $\mathbb{P}(X = n)$ en fonction de $\mathbb{P}(X = 0)$.
(2) Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$ puis déduire $\mathbb{P}(X = n)$,
(2) A quelle loi de probabilité usuelle correspond-elle?