التمرين الاول: الجزء (ج).

مجموع ريمان (Somme de Riemann) معرف بالعلاقة التالية:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

مجموع $k=n$ إلى $k=1$

التكامل الاول:

$$I = \int_{-2}^{1}(-5x+3)\,dx$$

$\left(f(x) = -5x+3 \;,\; b=1 \;,\; a=-2 \right)$

نعوض بالقيم في عبارة مجموع ريمان. معناه

$$I = \int_{-2}^{1}(-5x+3)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-(-2)}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f\left(-2+k\left(\frac{1-(-2)}{n}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f\left(-2+\frac{3k}{n}\right)$$

لدينا $f(x) = -5x+3$ اذن

$$f\left(-2+\frac{3k}{n}\right) = -5\left(-2+\frac{3k}{n}\right)+3$$

$$= 13 - \frac{15k}{n}$$

اذن

$$I = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(13-\frac{15k}{n}\right) =$$

نوزع المجموع على ما بداخل القوس

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}13 - \sum_{k=1}^{n}\frac{15k}{n}\right]$$

نوزع $\frac{3}{n}$ على ما بداخل القوس

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}13 - \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{15k}{n}\right]$$

$(x_i)_i$ $= \sum$

$\sum_{k=1}^{n}$ من لا علاقة له بـ k يخرج خارج المجموع

معناه: $I = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} 13 - \frac{3}{n}\cdot\frac{15}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right]$

نعين قيم المجاميع $\sum_{k=1}^{n} k$ و $\sum_{k=1}^{n} 13$

لدينا: $\sum_{k=1}^{n} 13 = (\overbrace{\underbrace{13}_{\text{من أجل } k=1} + \underbrace{13}_{\text{من أجل } k=2} + \dots + \underbrace{13}_{\text{من أجل } k=n}}^{n \text{ مرة}}) = n(13) = 13n$

و: $\underbrace{(1+2+3+\dots+n)}_{\text{مجموع متتالية حسابية}} = \sum_{k=1}^{n} k$

مجموع متتالية حسابية $= \frac{\text{عدد الحدود}}{2}$ (الحد الاول + الحد الاخير)

اذن: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(1+n)$

نعوض بقيم المجاميع في عبارة I. معناه:

$I = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{3}{\cancel{n}}(13\cancel{n}) - \frac{45}{n^2}\left(\frac{n}{2}(1+n)\right)\right]$

$= \lim_{n\to+\infty} \left[39 + \frac{45}{2n}(1+n)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[39 + \cancel{\frac{45}{2n}}^{\,0} + \frac{45}{2}\right]$

$= 39 + \frac{45}{2} = \boxed{\frac{123}{2}}$

التكامل السابق

$$J=\int_{-x}^{x} e^{5t}\,dt$$

$a = -x$ ، $b = x$ ، f

مجموع من $k=0$ إلى $k=n-1$

مجموع ريمان هو أيضا :

$$J=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x-(-x)}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} f\left(-x+k\left(\frac{x-(-x)}{n}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2x}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} f\left(-x+\frac{2x}{n}k\right)$$

لدينا : $f(t)=e^{5t}$ $\Leftarrow$

$$f\left(-x+\frac{2x}{n}k\right)=e^{5\left(-x+\frac{2x}{n}k\right)}$$

$$=e^{-5x+\frac{10x}{n}\cdot k}$$

ومنه :

$$J=\lim_{n\to+\infty}\frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-5x+\frac{10x}{n}\cdot k}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-5x}\cdot e^{\frac{10x}{n}\cdot k}$$

ليس لها علاقة إذن تخرج خارج المجموع $\sum_{k=1}^{n}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2x}{n}\cdot e^{-5x}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{10x}{n}\cdot k}$$

تعيين قيمة المجموع $\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{10x}{n}\cdot k}$

لدينا :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{10x}{n}\cdot k}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{10x}{n}}\right)^k=\left(1+e^{\frac{10x}{n}}+\left(e^{\frac{10x}{n}}\right)^2+\dots+\right)$$

متتالية هندسية و مجموعها يساوي

$$\text{الحد الاول}\times\left(\frac{1-(\text{الاساس})^{\text{عدد الحدود}}}{1-\text{الاساس}}\right)$$

و الاساس يساوي : $e^{\frac{10x}{n}}$

اذن:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{10x}{n}\cdot k} = 1\cdot\left(\frac{1-\left(e^{\frac{10x}{n}}\right)^{n}}{1-e^{\frac{10x}{n}}}\right) = \frac{1-e^{10x}}{1-e^{\frac{10x}{n}}}$$

نعوض عبارة المجموع في J : اذن:

$$J = \lim_{n\to+\infty} 2e^{-5x}\cdot\frac{x}{n}\left(\frac{1-e^{10x}}{1-e^{\frac{10x}{n}}}\right)$$

$$= 2e^{-5x}\left(1-e^{10x}\right)\cdot \boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{x/n}{1-e^{\frac{10x}{n}}}}$$

$I \rightarrow$

من لا علاقة له بـ n تخرج خارج النهاية

لحساب هذه النهاية نستعمل النهاية الشهيرة

$$\lim_{U\to 0}\frac{e^{U}-1}{U} = 1$$

لهذا السبب نضع $U=\frac{10x}{n}$ اذن نتحصل على مايلي

لما $n\longrightarrow+\infty$ ينتج: $U\longrightarrow 0$. اذن

$$I = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\cdot\frac{10\cdot x/n}{1-e^{\frac{10x}{n}}} = \frac{1}{10}\lim_{U\to 0}\frac{U}{1-e^{U}} = \frac{1}{10}\lim_{U\to 0}\frac{1}{-\frac{(e^{U}-1)}{U}}$$

لنتحصل على نفس القيمة نضرب ونقسم على 10

للتحصل على النهاية الشهيرة

$$= \frac{1}{10}\lim_{U\to 0}\frac{-1}{\frac{e^{U}-1}{U}} = -\frac{1}{10}$$

$1 \leftarrow$

اذن:

$$J = 2e^{-5x}\left(1-e^{10x}\right)\cdot\left(\frac{-1}{10}\right) = -\frac{e^{-5x}}{5}\left(1-e^{10x}\right)$$

ملاحظات

- مجموع ريمان يعبر عنه بإحدى العبارتين:

① $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$

② $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$

$= \int_a^b f(x)\,dx$

- عند حساب مجموع ريمان، اتبعوا المراحل التالية:

1- تعويض a و b بقيمهما. (انتبهوا للإشارة)

2- تبسيط العبارة $\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$

3- بعد تبسيط العبارة، نعوض بعبارة الدالة f.

4- تبسيط عبارة المجموع وذلك بإيجاد عبارة مبسطة له (من لا علاقة له ب k يخرج خارج المجموع)

5- بعد تبسيط المجموع، نحسب النهاية.