Université de Biskra
Faculté des SENV
Département de Mathématiques

2^{er} semestre, année 2019/2020
$3^{ième}$ année licence Maths
Module: Probabilités Avancées

T.D. $N^0 4$

Exercice $\mathbf{n^0}$ 1: La durée d'une communication téléphonique urbaine est présenté par une v.a D uniformément distribuée sur $[0,t]$, où t est un nombre réel positif donné. On souhaite étudier le comportement de la plus longue durée de n communications, définie par $M_n = \max(D_1,...,D_n)$, lorsque n devient infini, les v.a D_i étant supposées indépendantes et de même loi que D. Montrer que M_n converge en probabilité vers t.

Exercice $\mathbf{n^0}$ 2 (Devoir): Montrer que la convergence presque-sûre implique la convergence en probabilité.

Exercice $\mathbf{n^0}$ 3 : Soient X et $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, F, \mathbb{P})$ et vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$$

Montrer que X_n converge presque sûrement vers X.

Exercice $\mathbf{n^0}$ 4 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé $(\Omega, F, \mathbb{P})$; on suppose qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les séries

$$\sum_n a_n, \qquad \sum_n \mathbb{P}(\{X_n \neq a_n\})$$

soient convergentes. Démontrer que la série $\sum_n X_n$ est p.s. convergente.

Exercice $\mathbf{n^0}$ 5 : Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$; on suppose qu'il existe une fonction $G : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ vérifiant $\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{t} = \infty$ telle que

$$\sup_i E[G(|X_i|)] < \infty.$$

Démontrer que la famille $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable.

Exercice $\mathbf{n^0}$ 6 : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$ convergeant en loi respectivement vers X et Y. On suppose que pour tout n, X_n , et Y_n sont indépendantes et que X et Y sont indépendantes.

1. Démontrer que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + Y$.
2. Donner un exemple montrant que l'hypothèse d'indépendance est indispensable.