

TD04 تصحيح سلسلة Math2

التمرين 04 :

تفكيك الكسور الى عناصر بسيطة من النوع 1 و 2.

$$01) \int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) + c.$$

$$02) \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = (\ln|x|) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c.$$

$$03) \int \frac{x^4}{x^2-1} dx = \int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2-1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c.$$

لحساب

$$04) \int \frac{1}{x^3-1} dx$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) \quad \text{لاحظ ان}$$

ومنه مثلا بالمطابقة نجد الثوابت a, b, c

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} \quad / \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{2x+4}{x^2+x+1} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} \right) - \frac{3}{6} \left(\frac{1}{x^2+x+1} \right)$$

$$04) \int \frac{1}{x^3-1} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2} J$$

حيث

$$J = \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

$$(هدف السؤال) \quad J = \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad \text{كيفية حساب}$$

بين ان

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2+x+1 = \frac{3}{4} \left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right].$$

donc

$$\begin{aligned} J &= \frac{4}{3} \int \frac{1}{(t^2+1)} \frac{\sqrt{3}}{2} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(t) + c \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c \end{aligned}$$

$$t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt.$$

وهذا باستعمال تغيير متغير

اخيرا

$$04) \int \frac{1}{x^3-1} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$