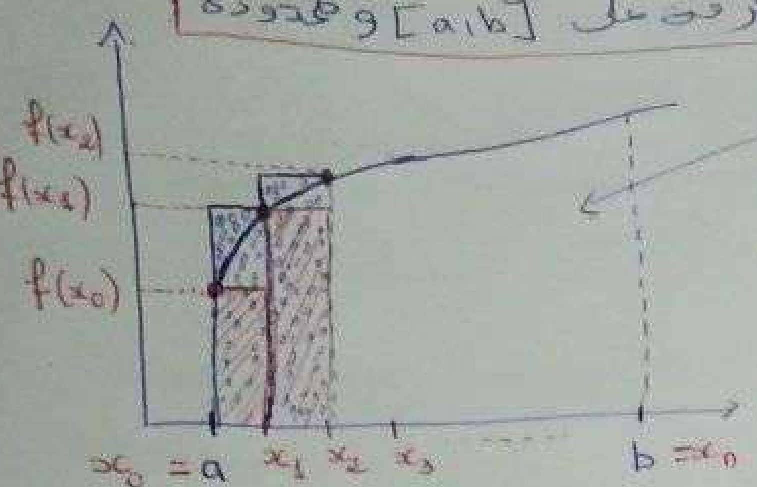
f دالة معرفة على [a,b] ومحدودة

ملخص :



هذه المساحة تمثل تكامل الدالة f

لحساب مساحة هذا الحيز نقوم بتقسيم المجال [a,b] إلى تقسيمات من الشكل $[x_{i-1},x_i]$ حيث $i=\overline{1,\dots,n}$ معناه نتحصل على مجالات من الشكل $[x_0,x_1]$ ، $[x_1,x_2]$ ، ...... ، $[x_{n-1},x_n]$

نحتاج من أجل معرفة مفهوم تكامل الدالة f إلى المفهومين التاليين : مجموع داربو العلوي ومجموع داربو السفلي .

$\boxed{1}$ مجموع داربو العلوي :

Somme de Darboux supérieure :

هذا المجموع يرمز له بـ $S_f(p)$

p ← التقسيمة الخاصة بالمجال [a,b]

حيث :

$$S_f(p)=\sum_{i=1}^{n} \overbrace{M_i}^{\text{الطول}}\cdot\overbrace{(x_i-x_{i-1})}^{\text{العرض}}$$

$S_f(p)$ عبارة عن مجموع مساحة المستطيلات الملونة بالأزرق (خارج المنحنى) ونعلم أن مساحة المستطيل هي الطول × العرض . في هذه الحالة العرض هو من الشكل (x_i-x_{i-1}) والطول هو أكبر قيمة للدالة على المجال $[x_{i-1},x_i]$ ونرمز له بـ M_i معناه: $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

$$S_f(p) = \overbrace{M_1 \cdot (x_1 - x_0)}^{\text{المستطيل الاول}} + \overbrace{M_2 \cdot (x_2 - x_1)}^{\text{المستطيل الثاني}} + \cdots + \overbrace{M_n \cdot (x_n - x_{n-1})}^{\text{المستطيل } n} :\text{اذن}$$

M_1: أكبر قيمة لـ $f(x)$ على المجال $[x_0, x_1]$

M_2: أكبر قيمة لـ $f(x)$ على المجال $[x_1, x_2]$

M_n: أكبر قيمة لـ $f(x)$ على المجال $[x_{n-1}, x_n]$

2] مجموع داربو السفلي:

Somme de Darboux inférieure

هذا المجموع يرمزله بـ $s_f(p)$ حيث

$$s_f(p) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{m_i}^{\text{الطول}} \overbrace{(x_i - x_{i-1})}^{\text{العرض}}$$

$s_f(p)$ عبارة عن مجموع مساحة المستطيلات الملونة بالاحمر (داخل المنحنى) ▨ ومساحة المستطيل هي الطول x العرض.

العرض: $x_i - x_{i-1}$

الطول: اصغر قيمة للدالة $f(x)$ على المجال $[x_{i-1}, x_i]$ و نرمزله بـ m_i معناه:

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$s_f(p) = \overbrace{m_1 \cdot (x_1 - x_0)}^{\text{المستطيل 1}} + \overbrace{m_2 \cdot (x_2 - x_1)}^{\text{المستطيل 2}} + \cdots + m_n (x_n - x_{n-1}) :\text{اذن}$$

m_1: اصغر قيمة لـ $f(x)$ على المجال $[x_0, x_1]$

m_2: اصغر قيمة لـ $f(x)$ على المجال $[x_1, x_2]$

m_n: اصغر قيمة لـ $f(x)$ على المجال $[x_{n-1}, x_n]$

نتعرف الآن على مفهوم تكامل f باستعمال المفاهيم السابقة

تعريف: نقول عن f أنها قابلة للمكاملة اذا تحقق مايلي:

$$\sup_{P} s_f(P) = \inf_{P} S_f(P)$$

و في هذه الحالة $\int_a^b f(x)\,dx$ يعرف كالتالي:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \underbrace{\sup_{P} s_f(P)}_{\text{أكبر}} = \underbrace{\inf_{P} S_f(P)}_{\text{أصغر}}$$

P: تقسيمة للمجال $[a,b]$.

مساحة سفلية (تحت المنحنى)

مساحة علوية (فوق المنحنى)

حل التمرين الاول: الجزء (1)

نبرهن أن الدالة $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$$

غير قابلة للتكامل ؟؟؟

$\mathbb{R}$ ماعدا $\mathbb{Q}$

معناه إذا كان x ناطق ($x \in \mathbb{Q}$) فإن صورته تساوي 1 وإذا كان x غير ناطق (اصم) $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ فإن صورته تساوي -1 معناه لـ f صورتين فقط اما 1 او -1

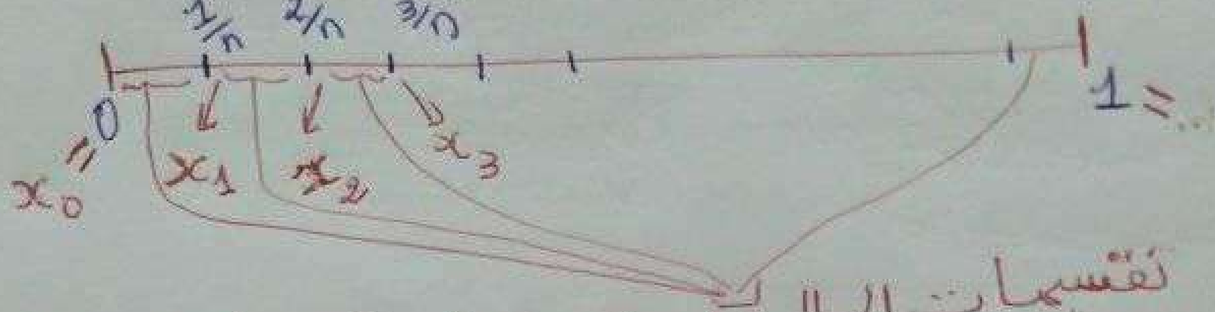
حسب الملخص السابق، لنبرهن أن f غير قابلة للتكامل يكفي أن نبرهن أن:

$$\sup_{P} s_f(P) \neq \inf_{P} S_f(P)$$

لتعيين تقسيمة p للمجال $[0,1]$ ولتكن كالتالي: $p=(x_i)$ حيث $i=\overline{0,\dots,n}$ / $x_i=\frac{i}{n}$

معناه:

$$p=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\dots,\frac{n}{n}=1\right)$$



تقسيمات المجال $[0,1]$ وبالتالي تحصلنا على مجالات جزئية طولها $\frac{1}{n}$.

كل مجال جزئي $[x_{i-1},x_i]$ حيث $i=\overline{1,\dots,n}$ فيه عنصر ~~...~~ ناطق وآخر غير ناطق معناه:

على أي مجال جزئي $[x_{i-1},x_i]$ نجد صورتين لـ $f(x)$:

$f(x)=1$ (في حالة $x\in\mathbb{Q}$) ← ناطق

و $f(x)=-1$ (في حالة $x\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}$) ← أصم.

وبالتالي نستنتج

$\forall x\in[x_{i-1},x_i]$: $\sup f(x)=1$ ، $\operatorname{Inf} f(x)=-1$

$\Rightarrow$ على أي مجال

بعد تعيين كل ما يخص التقسيمة وما ينتج عنها، نذهب للخطوة الثانية وهي حساب مجاميع داربو (Darboux)

ثانيا: $[f_a]$ مجموع داربو العلوي:

لدينا مما سبق:

$$SS=S_p(f)$$

$$S_p(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$= \underbrace{\boxed{\sup_{x \in [x_0, x_1]} f(x)}}_{} \cdot (x_1 - x_0) + \boxed{\sup_{x \in [x_1, x_2]} f(x)} \cdot (x_2 - x_1) + \dots +$$

$1 =$ ، $1 =$

$$\boxed{\sup_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x)} \cdot (x_n - x_{n-1})$$

$1 =$

انطلاقا من ملاحظات المرحلة الاولى: اكبر قيمة لـ f على اي مجال جزئي تساوي 1.

$$= 1 \cdot (\cancel{x_1} - x_0) + 1 \cdot (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + \cancel{\dots} + 1 \cdot (x_n - x_{n-1})$$

$$= x_n - x_0 = \frac{n}{n} - \frac{0}{n} = 1 - 0 = \boxed{1} \Big/ \left(x_i = \frac{i}{n} \right)$$

ب] مجموع داربو السفلي: $s_p(f) = ???$

لدينا مما سبق:

$$s_p(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$-1 =$ ، $-1 =$

$$= \boxed{\inf_{x \in [x_0, x_1]} f(x)} \cdot (x_1 - x_0) + \boxed{\inf_{x \in [x_1, x_2]} f(x)} \cdot (x_2 - x_1) + \dots +$$

$-1 =$

$$\boxed{\inf_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x)} \cdot (x_n - x_{n-1})$$

انطلاقا من ملاحظات المرحلة الثانية: اصغر قيمة لـ f على اي مجال جزئي تساوي -1

$$= -1 \cdot (x_1 - x_0) - 1 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + (-1) \cdot (x_n - x_{n-1})$$

$$= -1 \left[(\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + \cancel{\dots} + (x_n - \cancel{x_{n-1}}) \right]$$

$$= -1 [x_n - x_0] = -1 \left[\frac{n}{n} - \frac{0}{n} \right] = \boxed{-1} \Big/ x_i \dots$$

في الاخير نستنتج أن:

$$S_f(P) = 1 \quad \text{و} \quad s_f(P) = -1$$

ثالثا:

هل: $\sup\limits_P s_f(P) = \inf\limits_P S_f(P)$ ؟؟

نلاحظ أن:

$\forall P$ (من أجل أي تقسيمة لـ $[0,1]$)

لدينا: $\sup\limits_P s_f(P) = -1$

و: $\inf\limits_P S_f(P) = 1$

مهما كان اختيارنا لنوع التقسيمة لـ $[0,1]$ يبقى قيم

مجموع داربو العلوي هو: 1

ومجموع داربو السفلي هو: -1

بما أن القيم ثابتة من أجل أي تقسيمة لـ $[0,1]$

إذن: $\sup\limits_P s_f(P) = -1$ و $\inf\limits_P S_f(P) = 1$

معناه: $\inf\limits_P S_f(P) \neq \sup\limits_P$

ومنه f غير قابلة للتكامل (au sens de Riemann) على $[0,1]$