# Chapitre II : Caractéristiques Géométrique des sections.

## Introduction :

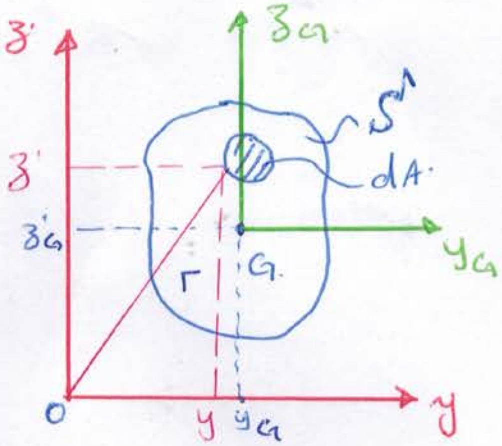
Le dimensionnement d'un élément de structure peut se résumer à la question suivante :

Quelle est la section minimale necessaire pour reprendre à la resistance ? autrement comment choisir la section qui soit à la fois économique et qui se passe en securité ?

## ~~Mom~~ Centre de gravité

~~La position du centre~~

On appelle. Centre de gravité d'une section, le point à travers lequel si on applique une force, elle en resulte une pression uniforme sur toute la section.




La position du centre de gravité de la section $(S')$ qui est difinit parrapport aux deux axes $(Oy, Oz)$ sont donnée par :

$$y_G = \frac{\iint_A y\,dA}{S}$$

$$z_G = \frac{\iint_A z\,dA}{S'}$$

On appelle moment statique d'une section $(S')$ parrapport aux deux axe $Oy$ et $Oz$ les quantites :

$$S_y = \iint_A z \cdot dA$$

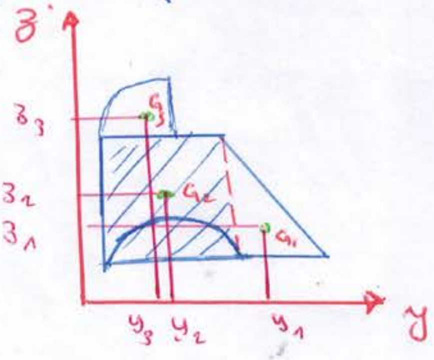
$$S_z = \iint_A y\,dA$$

donc :

$$\boxed{y_G = \frac{S_z}{A} \text{ et } z_G = \frac{S_y}{A}}$$

Lorsque une section qui se compose par des sections simple (cercle - rectangle - carré et triangle).

Le moment statique est définit par :




$$S_y = \sum_{i=1}^{n} A_i \, z_{Gi}$$

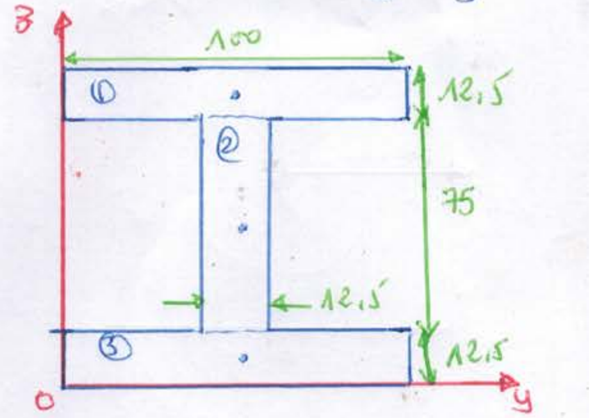
$$S_z = \sum_{i=1}^{n} A_i \, y_{Gi}$$

$\Rightarrow$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \, y_{Gi}}{A_i}$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \, z_{Gi}}{A_i}$$

Exemple : Determiner le centre de gravité de la section suivante parrapport les axes Oy et Oz.




On divise cette section à trois section simple [rectangle] ①, ② et ③

chaque section, elle le centre de gravité et sa position parrapport les axes Oy et Oz. et elle le sa surface (A)

donc :

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i \, y_{Gi}}{A_i}$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i \, z_G}{A_i}$$

On simplifie ces paramètre dans ce tableau.

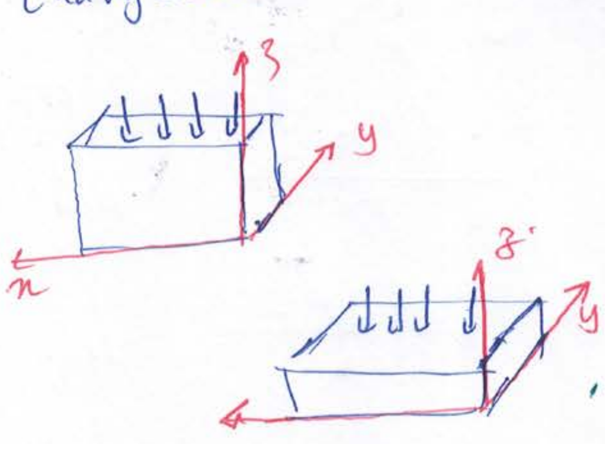
| | $y_i$ | $z_i$ | $A_i$ | $y_i A_i$ | $z_i A_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ① | 50 | 6,25 | 1250 | 62500 | 7812,5 |
| ② | 50 | 5,00 | 9,37,5 | 46875 | 46875 |
| ③ | 50 | 93,75 | 1250 | 62500 | 117187,5 |
| | | Σ. | 3437,5 | ~~593375~~ 171875 | 171875 |

$$y_G = \frac{171875}{3437{,}5} = 50$$

$$z_G = \frac{171875}{3437{,}5} = 50$$

## Moment d'inertie quadratique.

physiquement le moment d'inertie caractérise. l'aptitude (s'les) de la matière dans une section donne ~~...~~ à résister au fléchissement parrapport à un axe vis à vis un chargement




Mathématiquement le moment d'inertie de la section (S') donner parrapport (oy)et(oz) sont

$$I_y = \iint_A z^2 \, dA \quad [m^4]$$

$$I_z = \iint_A y^2 \, dA \quad [m^4]$$

## Moment d'inertie polaire

$$I_p = \iint_A r^2 \, dA \quad \text{avec} \quad r^2 = y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow I_p = \iint_A (y^2 + z^2) \, dA$$

$$= \iint_A y^2 \, dA + \iint_A z^2 \, dA$$

$$I_p = I_z + I_y$$

Remarque.

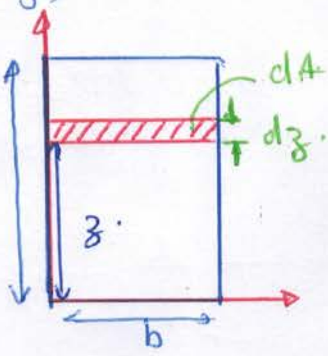
Si les axes passent par le centre de gravité, le moment statique est nul.

$$S_{y_G} = 0$$

$$S_{z_G} = 0$$

Exemple: Déterminer les centre de gravité et le moment d'inertie quadratique ($I_y$) d'un rectangle par rapport les axes (oy) et (oz)

$$z_G = \frac{S_y}{A_{\square}}$$




• Le moment statique. ($S_y$)

$$S_y = \iint_A z\, dA$$

$$dA = b\, dz$$

$$\Rightarrow S_y = \iint_A z\, b\, dz = b\iint_A z\, dz$$

$$= b\left[\frac{1}{2} z^2\right]_0^h$$

$$S_y = \frac{1}{2} b h^2$$

Centre de gravité.

$$z_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{1}{2} b h^2}{b h} = \frac{1}{2} h$$

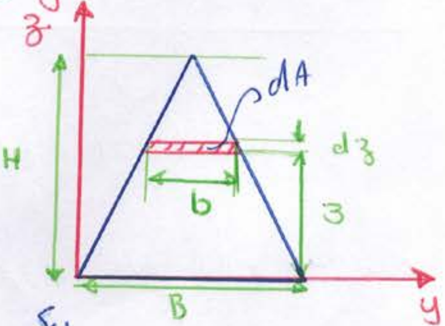
Moment d'inertie quadratique

$$I_y = \iint_A z^2 dA = \iint_A z^2 b\, dz$$

$$= b \iint_A z^2 dz = b\left[\frac{1}{3} z^3\right]_0^h$$

$$I_y = \frac{b h^3}{3}$$

• triangle:




$$z_G = \frac{S_y}{A_\Delta}$$

• Le moment statique:

$$S_y = \iint z\, dA$$

$$dz = b\, dz$$

avec $b = \frac{B}{H}(H - z)$.

$$\Rightarrow S_y = \iint_A z\, b\, dz$$

$$= \iint z\left[\frac{B}{H}(H - z)\right] dz$$

$$= \iint_A \left(z B - \frac{B}{H} z^2\right) dz$$

$$= \frac{1}{2} B H^2 - \frac{1}{3} B H^2 = \frac{1}{6} b H^2$$

## Le centre de gravité :

$$z_G = \frac{S_y}{A_\Delta} = \frac{\frac{1}{6} BH^2}{\frac{1}{2} BH}$$

$$z_G = \frac{1}{3} H$$

* **Le moment d'inertie quadratique**

$$I_y = \iint z^2 dA$$

$$= \iint z^2 \frac{B}{H}(H-z)\, dz$$

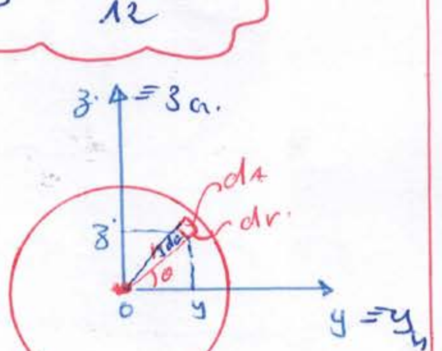
$$= \frac{B}{H} \iint_A (H z^2 - z^3)\, dz$$

$$= \frac{B}{H}\left(\left[\frac{1}{3} H z^3\right]_0^H - \left[\frac{1}{4} z^4\right]_0^H\right)$$

$$= \frac{B}{H}\left(\left[\frac{1}{3} H^4\right] - \left[\frac{1}{4} H^4\right]\right)$$

$$I_y = \frac{1}{12} BH^3$$

* Disque :




**Le moment statique**

$S_y = S_z = 0$ dans le centre

Les deux repère dans le centre de gravité $\Rightarrow y_G$ et $z_G = 0$

**Le moment quadratique**

$$I_{y_G} = \iint z^2 dA$$

$$dA = r\, d\theta\, dr$$

$$z = r \sin\theta$$

$$I_{y_G} = \iint_A r^2 \sin^2\theta \cdot r\, d\theta\, dr$$

$$I_{y_G} = \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \rightarrow ②$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta \rightarrow ①$$

$$② - ① \Rightarrow -2\sin^2\theta = \cos 2\theta - 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \sin 2\theta$$

$$\Rightarrow \quad -2\sin^2\theta = \cos 2\theta - 1$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}[1 - \cos 2\theta]$$

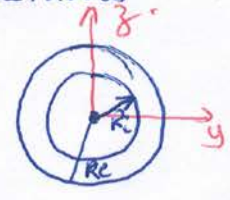
$$I_y = \frac{1}{4} R^4 \cdot \frac{1}{2} \theta\Big]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}[\sin 2\theta]_0^{2\pi}$$

$$I_y = \frac{1}{4}\pi R^4 = I_z$$

anneau (tube).

On peut calculer le moment d'inertie d'anneau par deux méthodes.

a)



$$I_y = \iint z^2 \, dA$$

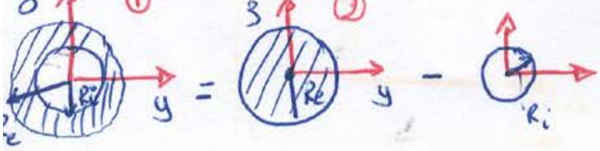
avec $z = r \sin\theta$

$dA = r \, dr \, d\theta$

$$\Rightarrow I_y = \int_{R_i}^{Re} \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\theta \; r \, d\theta \, dr$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi}{4}\left(R_e^4 - R_i^4\right)$$

b) Méthode de Substitution:

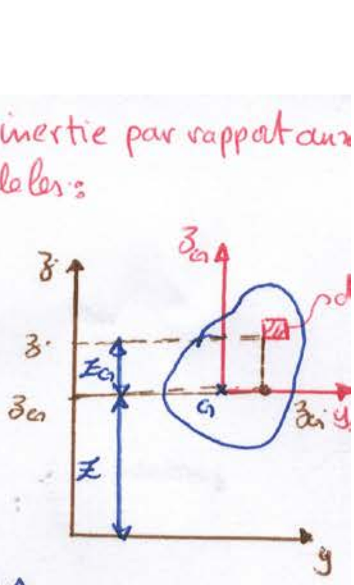


$$\Rightarrow I_y^{①} = I_y^{②} - I_y^{③}$$

$$= \frac{\pi}{4} R_e^4 - \frac{\pi}{4} R_i^4$$

$$I_y^{①} = I_z^{①} = \frac{\pi}{4}\left(R_e^4 - R_i^4\right)$$

+ Moment d'inertie par rappart aux axes parallèles:



$$I_y = \iint z^2 \, dA$$

$$z = Z + z_G$$

$$\Rightarrow I_y = \iint (Z + z_G)^2 \, dA$$

$$= \int Z^2 dA + \int z_G^2 dA + \int 2 Z z_G$$

$$= Z^2 A + I_{y_G}$$

$$\Rightarrow I_y = I_{y_G} + Z^2 A$$ Théorème de Huyegens

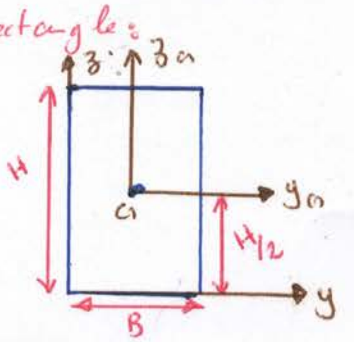
avec $I_{y_G}$: Moment d'inertie par rappo l'axe centrau.

A: la surface ou l'air.

$Z$: La distance entre les deux axes $(y)$ et $(y_G)$.

Exemple: calcule le moment d'inertie ~~d'un~~ d'axe centrau par rappot l'axe y dans le Rectangle et triangle.

+ Rectangle :



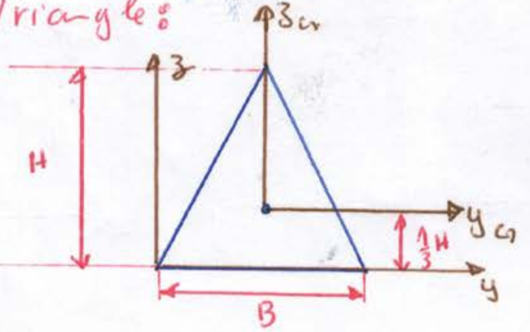
$$I_y = I_{y_G} + \left(\frac{H}{2}\right)^2 \cdot BH$$

$$\Rightarrow I_{y_G} = I_y - \frac{BH^3}{4}$$

$$I_{y_G} = \frac{BH^3}{3} - \frac{BH^3}{4}$$

$$I_{y_G} = \frac{BH^3}{12}$$

+ Triangle :



$$I_y = I_{y_G} + (z_G)^2 \cdot A$$

$$\Rightarrow I_{y_G} = I_y - (z_G)^2 \cdot A$$

$$= \frac{BH^3}{12} - \left(\frac{1}{3}H\right)^2 \cdot \frac{BH}{2}$$

$$I_{y_G} = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{18}\right) BH^3 = \frac{BH^3}{36}$$

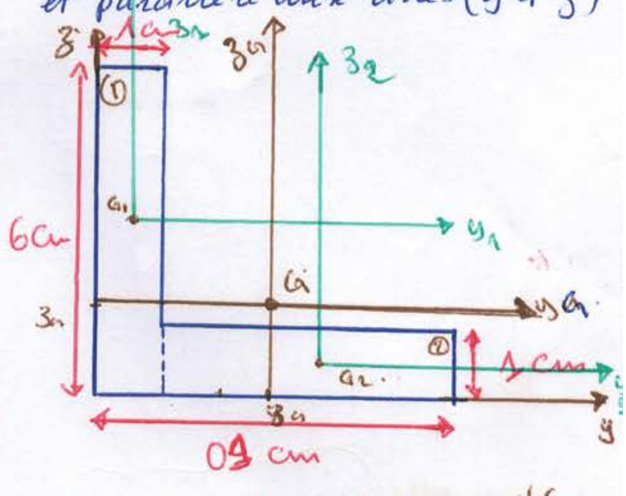
$$I_{y_G} = \frac{BH^3}{36}$$

• Exemple :

Déterminer la position du centre de gravité ~~et les moment~~ Parrapport les axes y et z.

Et les moment d'inertie.

Parrapport les axes centraux et parallèle aux axes (y et z)



• La position du centre de gravité :

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}$$

$$z_G = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i} = \frac{A_2 z_2 + A_1 z_1}{A_1 + A_2}$$

On peut résumer ces paramètre dans un tableau.

| | $y_i$ (cm) | $z_i$ (cm) | $A_i$ (cm²) | $y_i A_i$ (cm³) | $z_i A_i$ (cm³) |
|---|---|---|---|---|---|
| ① | 0,5 | 03 | 6 | 03 | 18 |
| ② | 05 | 0,5 | 08 | 40 | 04 |
| | | | 14 | 43 | 22 |

$$\Rightarrow y_G = \frac{43}{14} = 3{,}07 \text{ cm}$$

$$z_G = \frac{22}{14} = 1{,}57 \text{ cm}$$

* Mmoment d'inertie parrapport les axes centraux. $(y_G, z_G)$.

$$I_{y_G} = I_{y_G}^{(1)} + I_{y_G}^{(2)}$$

$$I_{y_G}^{(1)} = I_{y_1} + (a_1)^2 A_1$$

$$I_{y_1} = \frac{1 \times 6^3}{12} = \frac{216}{12} \quad a_1 = z_1 - z_G = 3 - 1,57$$

$$= 1,43 \text{ cm}$$

$$A_1 = 6 \text{ cm}^4$$

$$\Rightarrow I_{y_1} = \frac{216}{12} + (1,43)^2 \cdot 6$$

$$I_{y_G}^{(1)} = \frac{216}{12} + 12,27 = 30,27 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_G}^{(2)} = I_{y_2} + a_2^2 A_2$$

$$I_{y_2} = \frac{8 \times 1^3}{12} = \frac{8}{12}$$

$$a_2 = z_2 - z_1 = 0,5 - 1,57$$

$$= -1,07$$

$$\Rightarrow I_{y_G}^{(2)} = \frac{8}{12} + (1,07)^2 \cdot 8$$

$$I_{y_G}^{(2)} = \frac{8}{12} + 9,16 = 9,83 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{y_G} = 30,27 + 9,83 = 40,1 \text{ cm}^4}$$

$$I_{z_G} = I_{z_G}^{(1)} + I_{z_G}^{(2)}$$

$$I_{z_G}^{(1)} = I_{z_1} + (b_1)^2 A_1$$

$$= \frac{6}{12} + (y_1 - y_G)^2 \cdot A_1$$

$$= \frac{6}{12} + (0,5 - 3,07)^2 \cdot 6$$

$$(2,57)^2 \cdot 6$$

$$0,5 + 39,63 = 40,13$$

$$I_{z_G}^{(2)} = I_{z_2} + (b_2)^2 A_2$$

$$= \frac{1 \times 8^3}{12} + (y_2 - y_G)^2 \cdot A_2$$

$$\frac{512}{12} + (5 - 3,07)^2 \cdot 8$$

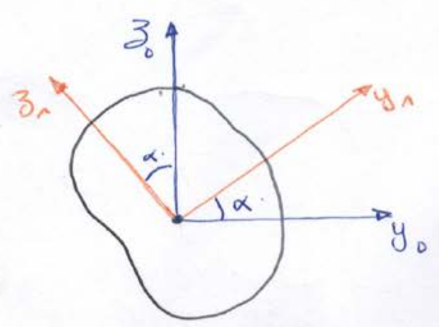
$$+ \quad 29,79$$

$$I_{z_G}^{(2)} = 42,67 + 29,79 = 72,46 \text{ cm}^4$$

$$\Rightarrow I_{z_G} = 40,13 + 72,46 =$$

$$\boxed{I_{z_G} = 112,59 \text{ cm}^4}$$

## Moment d'inertie par rapport des axes tournés.




$I_{y_0}$ et $I_{z_0}$ sont connus.

et $I_{y_1} = ?$

$$I_{y_1} = \iint z_1^2 \, dA$$

On a :
$$\begin{cases} y_1 = y_0\cos\alpha + z_0\sin\alpha \\ z_1 = -y_0\sin\alpha + z_0\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

Matrice de passage.

$$\Rightarrow I_{y_1} = \iint (-y_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha)^2 \, dA$$

$$= \iint \left((-y\sin^2\alpha)^2 + (z_0\cos\alpha)^2 \mp 2 y_0 z_0 \sin\alpha\cos\alpha\right) dA$$

$$I_{y_1} = \sin^2\alpha \iint y_0^2 \, dA + \cos^2\alpha \int z^2 \, dA$$
$$- 2\sin\alpha\cos\alpha \iint yz \, dA.$$

$$\Rightarrow I_{y_1} = I_{z_0}\sin^2\alpha + I_{y_0}\cos^2\alpha$$
$$- 2 I_{y_0 z_0}\cos\alpha\sin\alpha$$

On a :
$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2\alpha &= \tfrac{1}{2}\left[1 - \cos 2\alpha\right] \\ \text{et} \quad \cos^2\alpha &= \tfrac{1}{2}\left[1 + \cos 2\alpha\right] \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow I_{y_1} = I_{z_0}\left[\tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)\right] + I_y\left[\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)\right]$$
$$- I_{y_0 z_0}\sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow I_{y_1} = \tfrac{1}{2} I_{z_0} - \tfrac{1}{2} I_z \cos 2\alpha$$
$$+ \tfrac{1}{2} I_y + \tfrac{1}{2} I_{y_0}\cos 2\alpha - I_{y_0 z_0}\sin 2\alpha$$

$$\boxed{\Rightarrow I_{y_1} = \tfrac{1}{2}(I_{y_0} + I_{z_0}) + \tfrac{1}{2}(I_y - I_z)\cos 2\alpha - I_{y_0 z_0}\sin 2\alpha}$$

$$I_{z_1} = \iint y_1^2 \, dA = \iint (y_0\cos\alpha + z_0\sin\alpha)^2 \, dA$$

$$= \iint (y_0\cos\alpha)^2 + (z_0\sin^2\alpha)^2 + 2 y_0 z_0 \cos\alpha\sin\alpha$$

$$= I_{z_0}\cos^2\alpha + I_{y_0}\sin^2\alpha + 2 I_{y_0 z_0}\sin 2\alpha$$

$$= I_z\left(\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)\right) + I_{y_0}\left(\tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)\right)$$
$$+ 2 I_{y_0 z_0} \sin\ldots$$

* Produit d'inertie (moment d'inertie centrefuge).

On appelle moment produit, l'intégrale des produits des propriétés des aires par leur distances comptées à partir des axes y et z.

$$I_{yz} = \iint_A y z \, dA$$

Remarque:

+ Les moment d'inertie quadratique et polaire sont toujours positifs

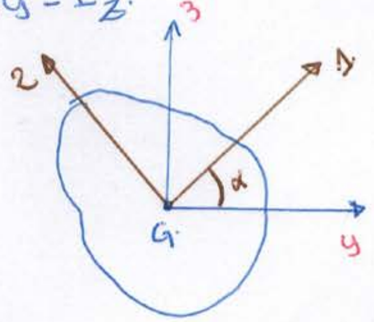
* Le produit d'inertie peut être positif, negatif et nul selon la disposition des axes.

$$I_{yz} = I_{y_G z_G} + y_G z_G A$$

* Moment d'inertie principaux

On obtient ainsi l'orientation des axes principaux (la position)

$$tg\, 2\alpha = \frac{2 I_{yz}}{I_y - I_z}$$




(y, z) sont des axes centraux.

(1, 2) " " " principaux.

+ Les valeurs des moments d'inertie principaux peuvent être obtenus par:

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$I_{z_1} = \frac{1}{2} I_{z_0} + \frac{1}{2} I_{z_0} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} I_{y_0} - \frac{1}{2} I_{y_0} \cos 2\alpha + 2 I_{y_0 z_0} \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{z_1} = \frac{1}{2}(I_{y_0} + I_{z_0}) + \frac{1}{2}(I_z - I_y) \cdot \cos 2\alpha + I_{y_0 z_0} \sin 2\alpha}$$

et

$$\boxed{I_{y_1 z_1} = \frac{1}{2}(I_{y_0} - I_{z_0}) \sin 2\alpha + I_{y_0 z_0} \cos 2\alpha}$$

avec $\boxed{I_{y_0} + I_{z_0} = I_{y_1} + I_{z_1}}$

---

Détermination de la valeur maximale :

$I_{y_1} = f(\alpha)$. Lorsque $I_{y_1}$ maximal

$$\Rightarrow \frac{dy_1}{d\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{2}(I_{y_0} - I_{z_0}) \sin 2\alpha + 2 I_{y_0 z_0} \cos 2\alpha = 0$$

$$-2 I_{y_0 z_0} \cos 2\alpha = (I_{y_0} - I_{z_0}) \sin 2\alpha$$

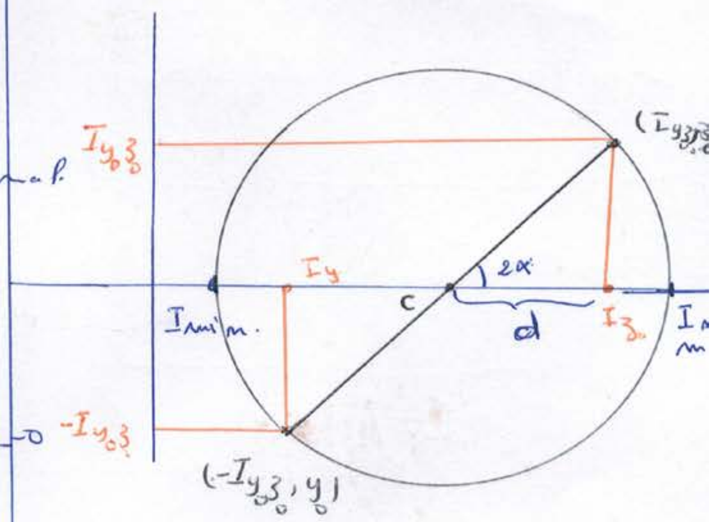
$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{-2 I_{y_0 z_0}}{(I_y - I_z)}$$

$$\boxed{I_{\max/\min} = \frac{1}{2}(I_{y_0} + I_{z_0}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_{y_0} - I_{z_0})\right]^2 + I}}$$

$I_{max}, I_{min}$ sont des moments d'inertie principaux. est $oy_1$ et $oz_1$ sont les axes centraux principaux.

Calcul $I_{max}, I_{min}$ par la méthode graphique (Cercle de Mh

$I_{y_0}, I_{z_0}$ et $I_{y_0 z_0}$ sont connu et $I_{max}$ et $I_{min}$ sont inconnus.




$$C = \frac{1}{2}(I_{y_0} + z_0)$$

$$R^2 = (I_{z_2} - C)^2 + I_{y_0 z_0}^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}(I_y - I_z)\right]^2 - I_{y_0 z_0}^2$$