

**Première année master :  
Physique de la Matière Condensée**

**Module:  
Propriétés Physique de la matière condensée 1  
(Coefficients : 3)**

**Présenté par:  
Dr. Belamri Djamel**

# Physique de la Matière Condensée

## Propriétés Physique de la matière condensée 1

### Programme du module

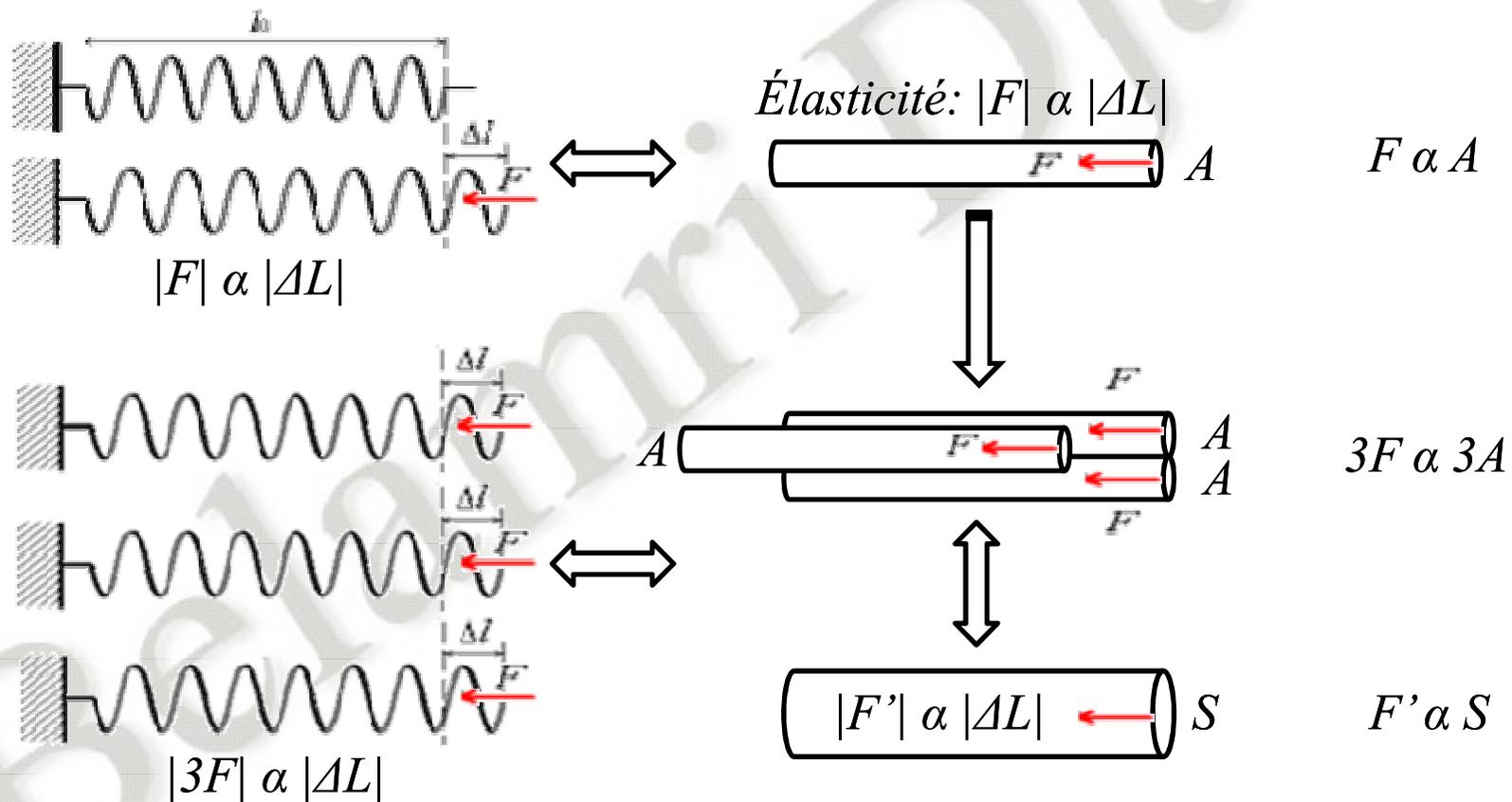
- I. Caractérisation du comportement anélastique
- II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets
- III. Spectre Continu
- IV. Variables internes et bases thermodynamique des spectres de relaxation
- V. Elasticité et anélasticité anisotrope
- VI. Mouvement des défauts ponctuels et atomiques
- VII. Théorie sur la Relaxation due aux défauts ponctuels
- VIII. Relaxation de Zener
- IX. Dislocations et joints de grain
- X. Relaxation due aux Mouvement des Dislocations
- XI. Relaxation due a la transformation de phase

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 1. Contraintes et déformations:

#### 1.1. La contrainte:



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 1. Contraintes et déformations:

#### 1.1. La contrainte:

C'est l'intensité des forces qui détermine l'écartement des atomes du matériau, les uns par rapport aux autres ou la compression des uns sur les autres, par unité de surface.

Son unité est le Pascal (Pa).

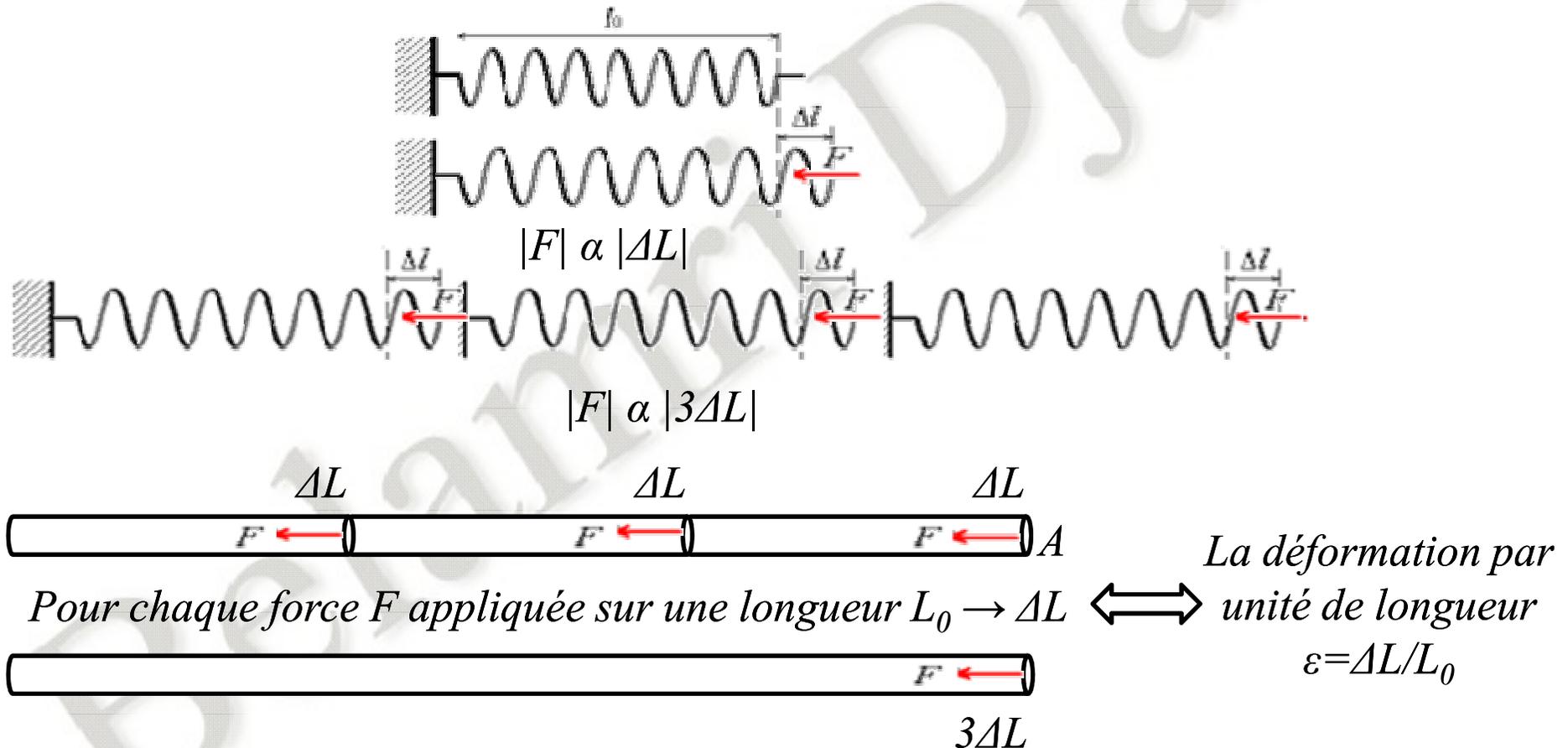
$$\sigma = F/S$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 1. Contraintes et déformations:

#### 1.2. La déformation:



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 1. Contraintes et déformations:

#### 1.2. La déformation:

Indique dans quelles proportions les liaisons inter atomiques (à l'échelle microscopique) et la structure elle-même (à l'échelle macroscopique) ont été déformées.

La déformation, pour une traction simple, est le rapport de l'allongement à la longueur initiale (L'allongement est sans unité).

$$\varepsilon = (L-L_0)/L_0 = \Delta L/L_0$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2. Comportement anélastique:

#### Anélasticité



Préfixe : An-  
«Déficient en »  
ou « sans ».

Racine: Elasticité  
Propriété physique  
intrinsèque des  
matériaux solides.

**La compréhension du phénomène d'élasticité est nécessaire pour mieux concevoir le comportement anélastique.**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.1. Comportement élastique:

Elasticité



Réversibilité dans la forme et la taille des matériaux solides après avoir subit des déformations.

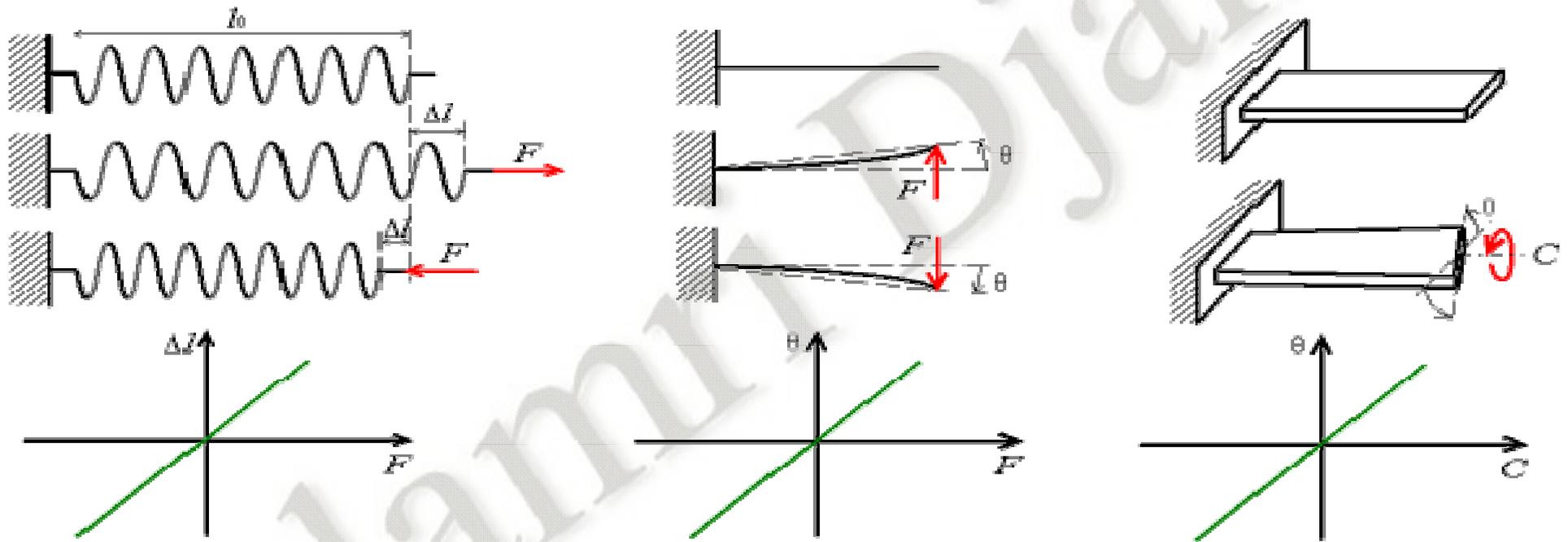


Le matériau retrouve son état initial juste après élimination des contraintes.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.1. Comportement élastique:



**Figure 1.** Phénomène d'élasticité représenté par plusieurs type de ressort

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 1.1. Comportement élastique:

Essais mécaniques



Exertion des forces de traction ou de compression dans des directions (uni-axiaux) sur des éprouvettes

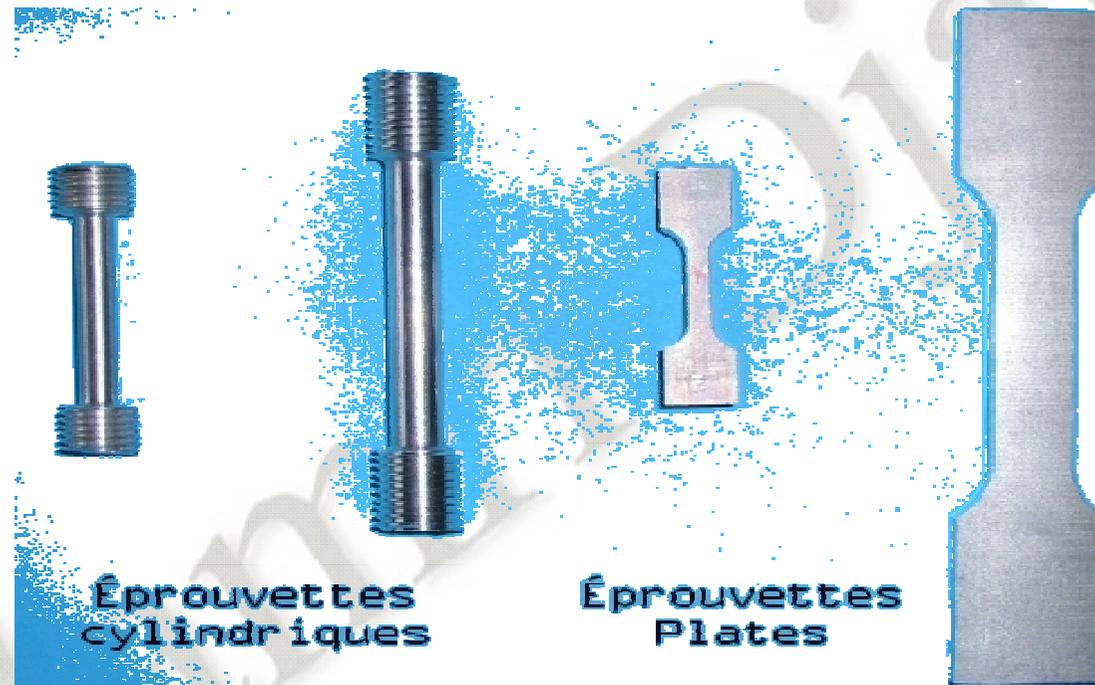


Facile à réaliser et pratique pour identifier le comportement macroscopique d'un matériau

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.1. Comportement élastique:



**Figure 2.** Les formes des éprouvettes généralement utilisées dans des essais mécaniques

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.1. Comportement élastique:

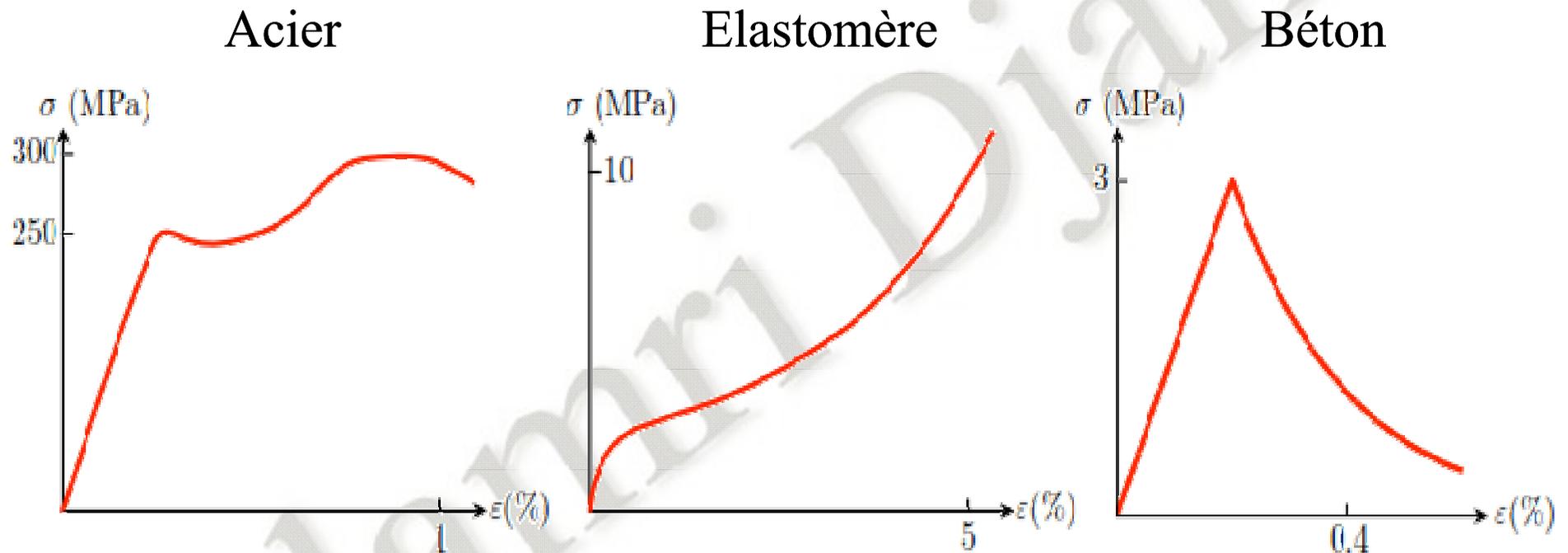


**Figure 3.** Appareil de traction

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.1. Comportement élastique:



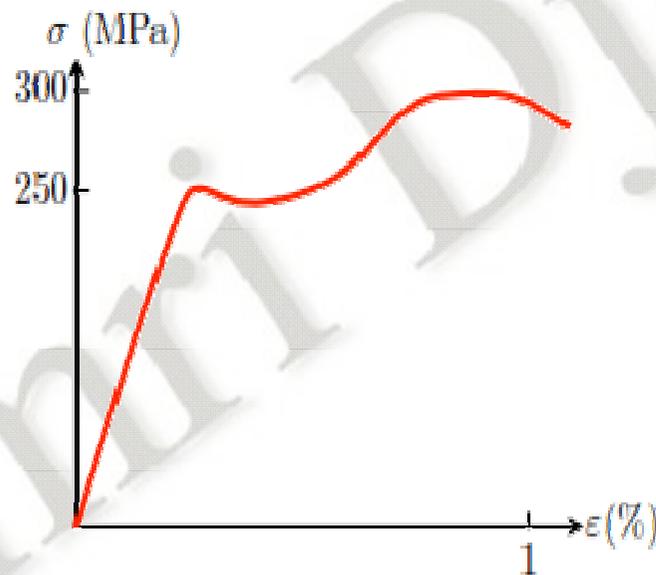
**Figure 4.** Réponses schématiques de différents matériaux dans un essai de traction uni-axiale monotone

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.1. Comportement élastique:

#### Acier doux



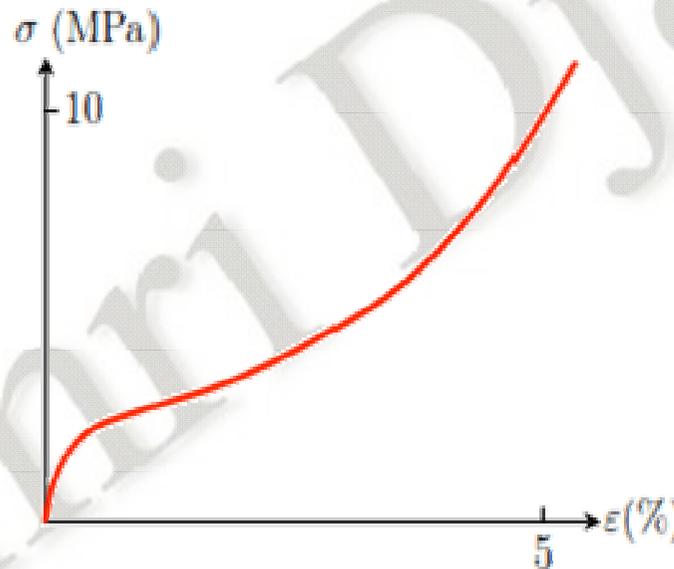
La courbe « contrainte-déformation » est quasi-linéaire, avec une pente (module d'Young « E ») de l'ordre de 200 GPa, jusqu'à des valeurs de contrainte autour de 200-250 MPa qui correspondent à une déformation d'environ  $10^{-3}$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 1.1. Comportement élastique:

#### Elastomère



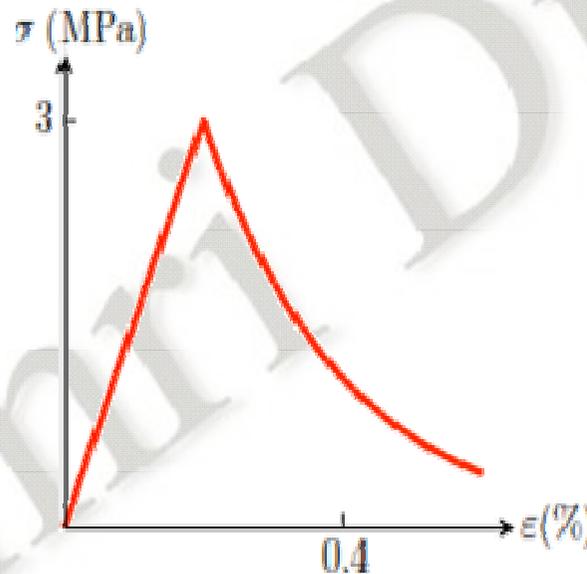
La courbe « contrainte-déformation » est fortement non linéaire, d'abord concave puis convexe avec un changement de concavité vers quelques % de déformation. Le module d'Young tangent est beaucoup plus faible que pour un acier.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.1. Comportement élastique:

#### Béton



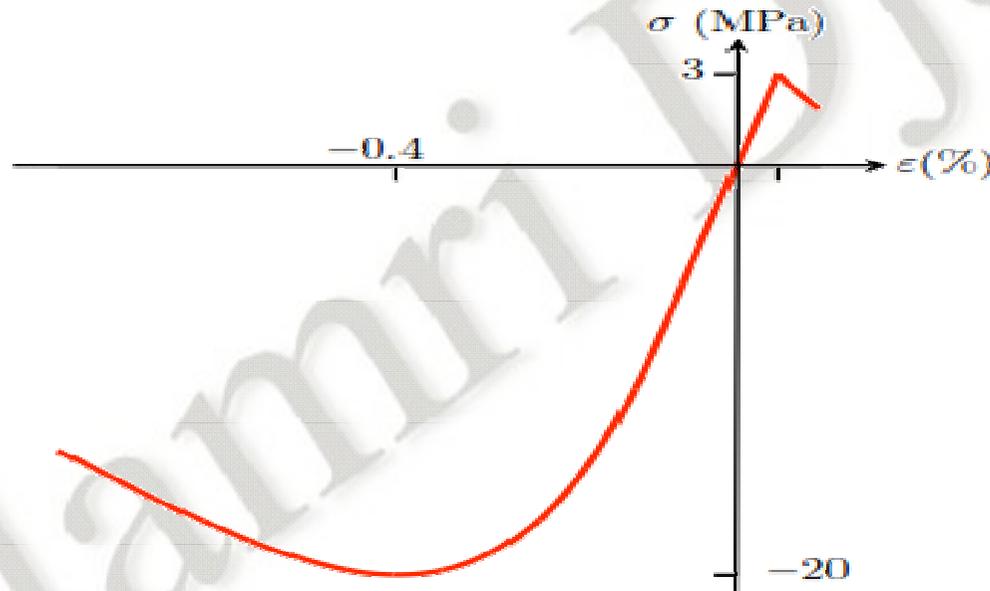
**Pour un essai de traction:** La courbe « contrainte-déformation » est quasi-linéaire jusqu'à une déformation de l'ordre de quelques  $10^{-3}$  et une contrainte de l'ordre de quelques MPa, puis une décroissance rapide de la contrainte (phénomène appelé adoucissement).

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.1. Comportement élastique:

**Pour un essai de compression:** La partie linéaire de la réponse est nettement plus importante.



**Figure 5.** Asymétrie du comportement du béton entre la traction et la compression

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.2. Comportement plastique:

La forme des courbes « contrainte-déformation » non-linéaires



Phénomène d'irréversibilité du comportement

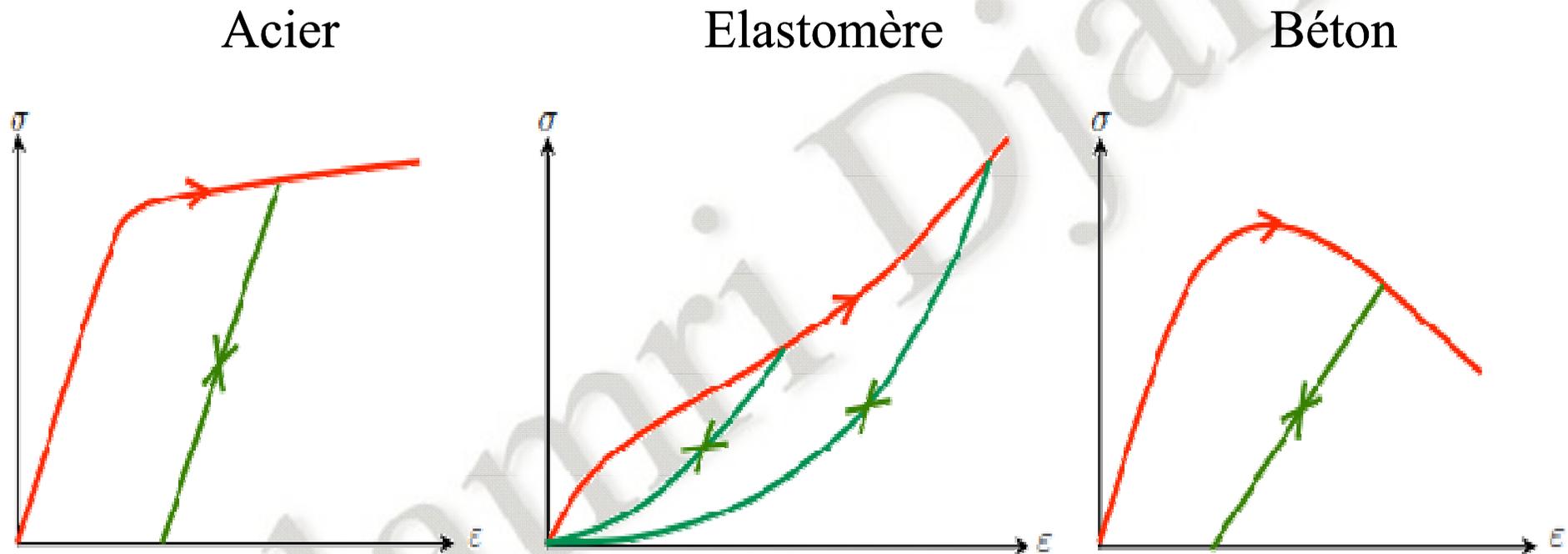


Constatacion par des chargements non monotones.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.2. Comportement plastique:



**Figure 6.** Réponses schématiques des différents matériaux dans un cycle de charge-décharge-recharge non monotone (Acier doux ; Elastomère ; Béton) en compression

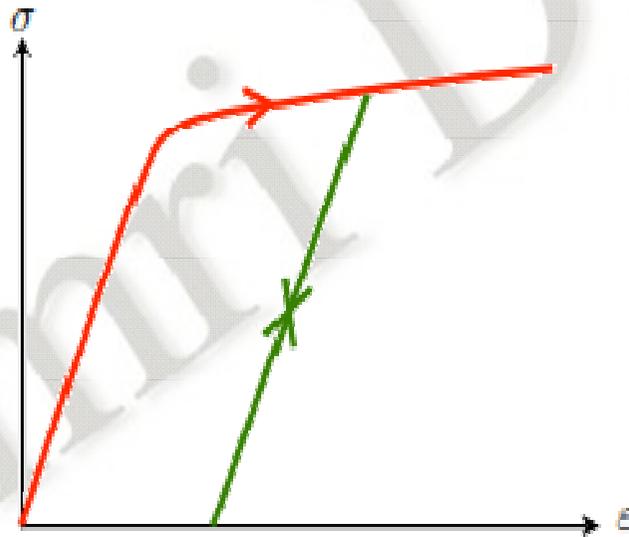
# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.2. Comportement plastique:

#### Acier doux

Pentes en charge pratiquement identique à celle de la décharge



A la fin de la décharge on a une déformation résiduelle

**Phénomène de plasticité**

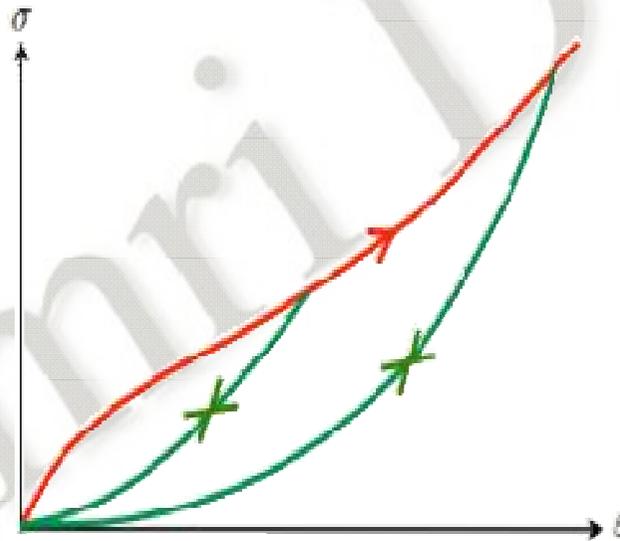
# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.2. Comportement plastique:

#### Elastomère

La décharge est comme la montée en charge fortement non linéaire



Pas de déformation résiduelle notable

**Boucle d'hystérésis est appelée « Effet Mullins »**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 1.2. Comportement plastique:

#### Elastomère

La recharge se fait pratiquement suivant la courbe de décharge, ce qui veut dire que cette phase de décharge-recharge est pratiquement réversible (mais non-linéaire). Lorsqu'on dépasse le niveau, on retrouve la courbe de première charge.

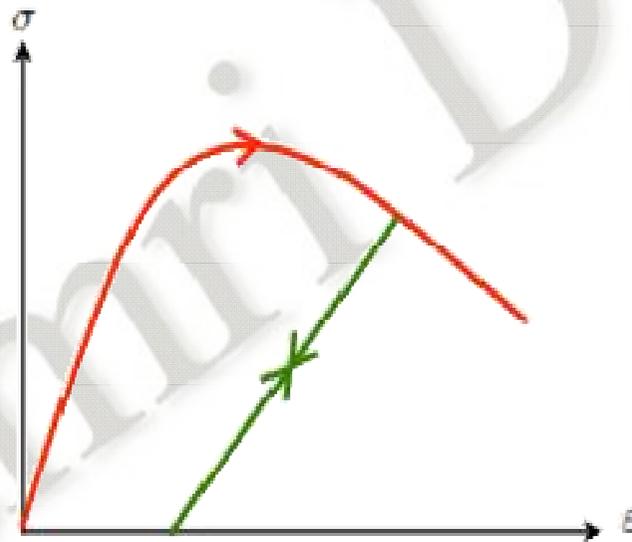
# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.2. Comportement plastique:

#### Béton

Pente de décharge plus faible que celle de la montée en charge.



A la fin de la décharge on à une déformation résiduelle  
**Perte de rigidité « endommagement ».**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.3. Quelques caractéristiques déterminées par l'essai de traction:

\* **La rigidité:** Une fonction de l'énergie des liaisons entre les atomes ou les molécules constituant le matériau.

**Plus ce module d'YOUNG est élevé, plus le matériau est rigide.**

\* **La résistance:** Une fonction de l'intensité des liaisons mais également de la forme des pièces ou de ses défauts.

**Contrainte maximale qu'un matériau avant de se rompre.**

\* **La ductilité:** Capacité d'un matériau à se déformer de façon permanente avant de se rompre.

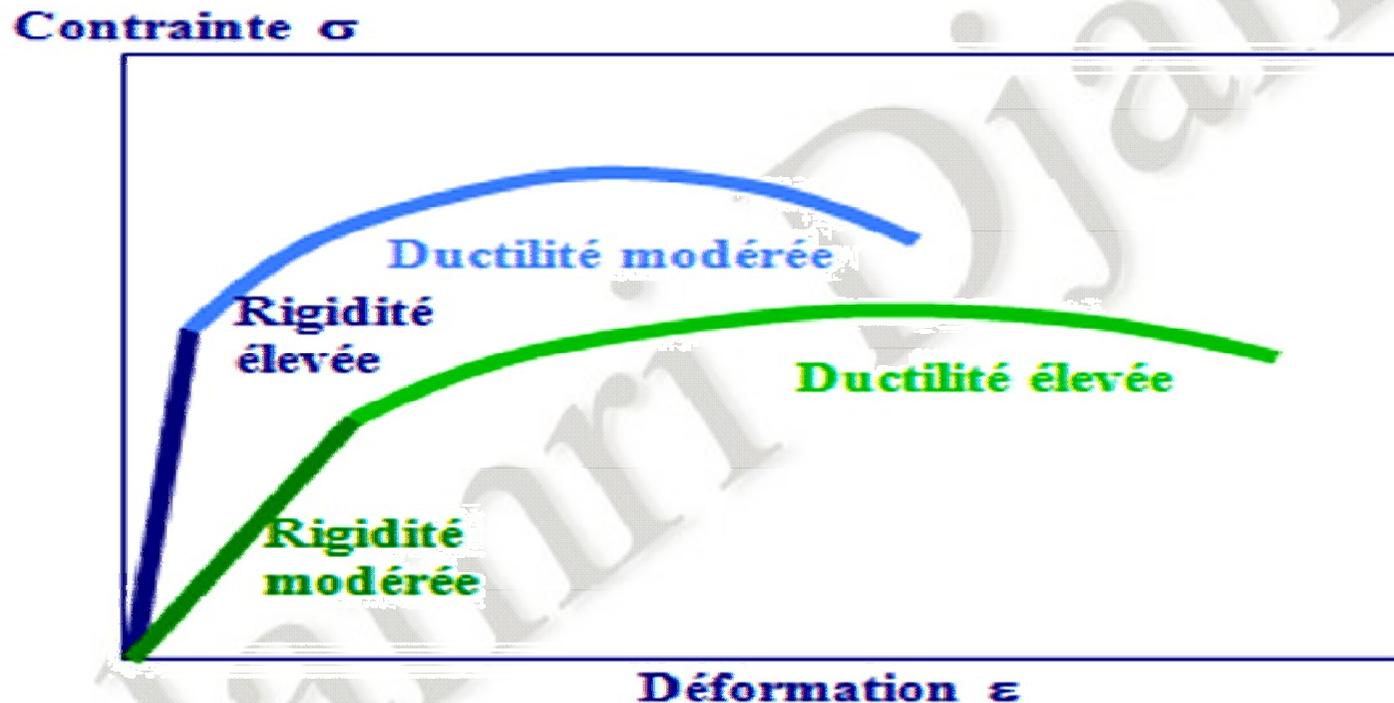
**Plus l'allongement à la rupture est élevé, plus le matériau est ductile.**

\* **La ténacité:** La résistance à la propagation brutale de fissures.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.3. Quelques caractéristiques déterminées par l'essai de traction:



**Figure 7.** Courbe contrainte-déformation. Deux matériaux avec des rigidités et des ductilités différentes

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 2.3. Quelques caractéristiques déterminées par l'essai de traction:



**Figure 8.** Ténacité = surface sous la courbe

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 3. Module d'élasticité et module de complaisance:

#### 3.1. Module d'élasticité (module de Young) « E ou M »:

On se basant sur les courbes précédentes, une relation linéaire entre la contrainte et la déformation peut être engendrée pour les petites déformations.

Et d'après Robert Hook (1635-1703) :

*« Un matériau à l'état solide ne résiste à une force appliquée qu'en se déformant sous l'action de cette force. »*

Cette relation est de la forme suivante:

$$\sigma = F/S = M. \varepsilon = E.\varepsilon = E. (L-L_0)/L_0 = E.\Delta L/L_0$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 3. Module d'élasticité et module de complaisance:

#### 3.1. Module d'élasticité (module de Young) « E ou M »:

Matériaux	E (GPa)	Matériaux	E (GPa)
Acier	210	Alumine	390
Aluminium	69	Béton	20 à 50
Chrome	289	Brique	14
Fer	196	Diamant	1000
Nickel	241	WC	650
Plomb	18	SiC	450
Zinc	78	Verre	69

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 3. Module d'élasticité et module de complaisance:

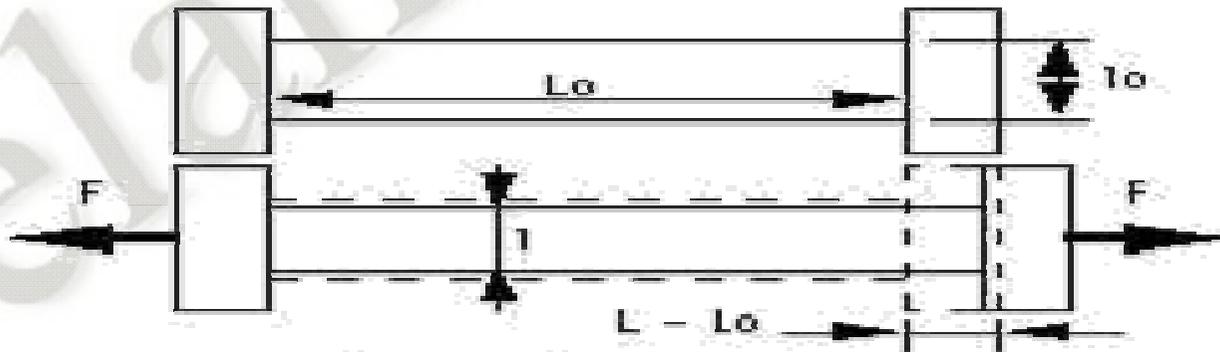
#### 3.1. Module d'élasticité (module de Young) « E ou M »:

En réalité, l'éprouvette se déforme dans les 3 directions :

- \* Le sens de traction : Allongement.
- \* Les deux sens perpendiculaires a la traction : Raccourcissement.

Les 3 déformations sont reliées par le coefficient de POISSON «  $\nu$  » :

$$\nu = (\Delta l/l_0)/(\Delta L/L_0)$$



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 3. Module d'élasticité et module de complaisance:

#### 3.2. Module de complaisance « J »:

La complaisance « J » est une grandeur qui caractérise le comportement élastique d'un matériau. Elle est définie comme l'inverse du module élastique et s'exprime en  $\text{Pa}^{-1}$

$$\mathbf{J = 1/M = 1/E}$$

$$\mathbf{(L-L_0)/L_0 = \Delta L/L_0 = \varepsilon = J.(F/S) = J.\sigma}$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 4. La viscoélasticité:

**Un corps élastique présente un comportement solide:**

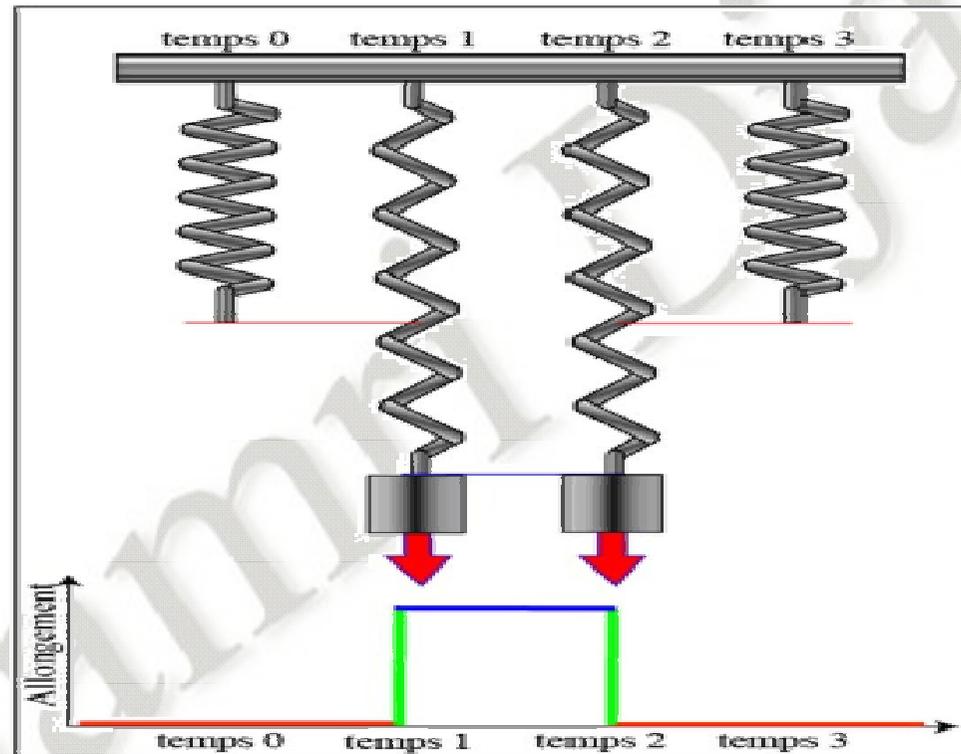
- \* Il se déforme proportionnellement à la contrainte qui lui est appliquée.
- \* La déformation est quasi instantanée à l'application de la force.
- \* Quel que soit le temps d'application de celle-ci, à l'instant où elle cesse d'agir, le retour est immédiat et complet.

**L'énergie du système est conservée.**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 4. La viscoélasticité:



**Figure 9.** Comportement élastiques

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 4. La viscoélasticité:

**Un corps visqueux présente un comportement liquide:**

- \* Il se déforme proportionnellement à la contrainte qui lui est appliquée.
- \* La déformation est progressive et lente à l'application de la force.
- \* Quel que soit le temps d'application de celle-ci, à l'instant où elle cesse d'agir, la déformation est conservée (permanente).

**L'énergie du système est dissipée.**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 4. La viscoélasticité:

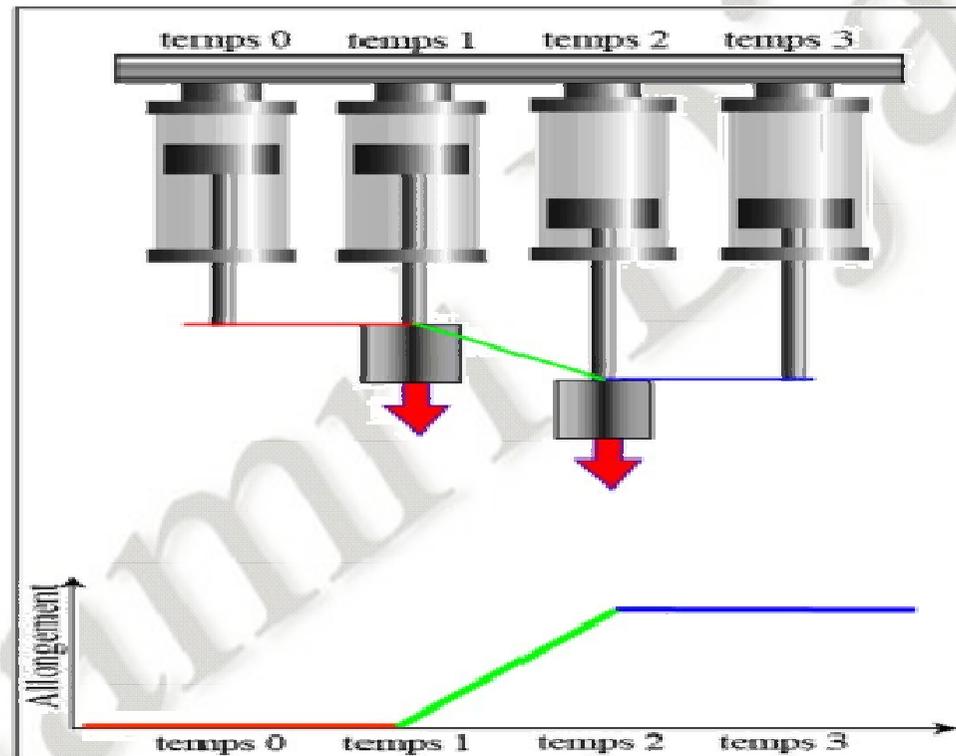


Figure 10. Comportement plastiques

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 4. La viscoélasticité:

**Un corps viscoélastique présente un comportement entre solide (élastique) et liquide (visqueux) :**

- \* Il se déforme proportionnellement à la contrainte qui lui est appliquée.
- \* La déformation est régie par des propriétés visqueuses et élastiques.
- \* On les représente par des associations en série ou en parallèle de ressort ou d'amortisseurs.

**La viscoélasticité est une combinaison des deux phénomènes et peut être expliquée simplement par deux modèles :**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 4. La viscoélasticité:

#### \* **Le modèle de Maxwell:**

Représente le comportement d'un matériau viscoélastique liquide.

\* Il possède un comportement totalement élastique sous un effort brutal

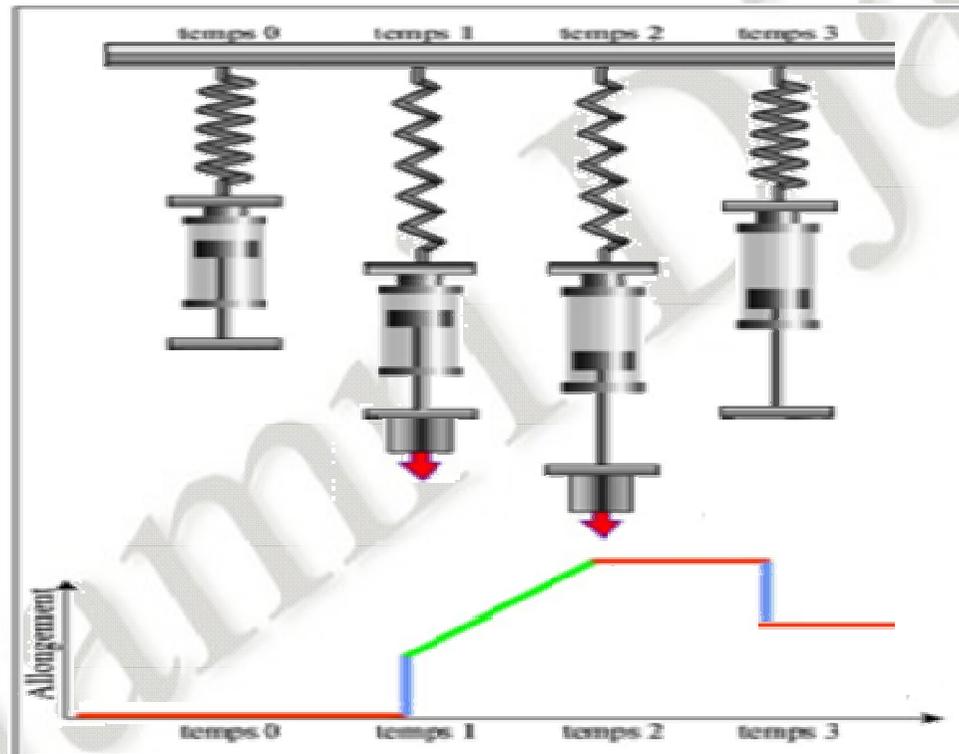
\* Présente une déformation résiduelle permanente après arrêt de la contrainte:

**Ressort et amortisseur en série.**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 4. La viscoélasticité:



**Figure 11.** Modèle de Maxwell

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 4. La viscoélasticité:

#### \* **Le modèle de Kelvin-Voigt:**

Représente le comportement d'un matériau viscoélastique solide.

\* Il ne possède aucune élasticité instantanée, les contraintes deviennent infinies sous une déformation brutale.

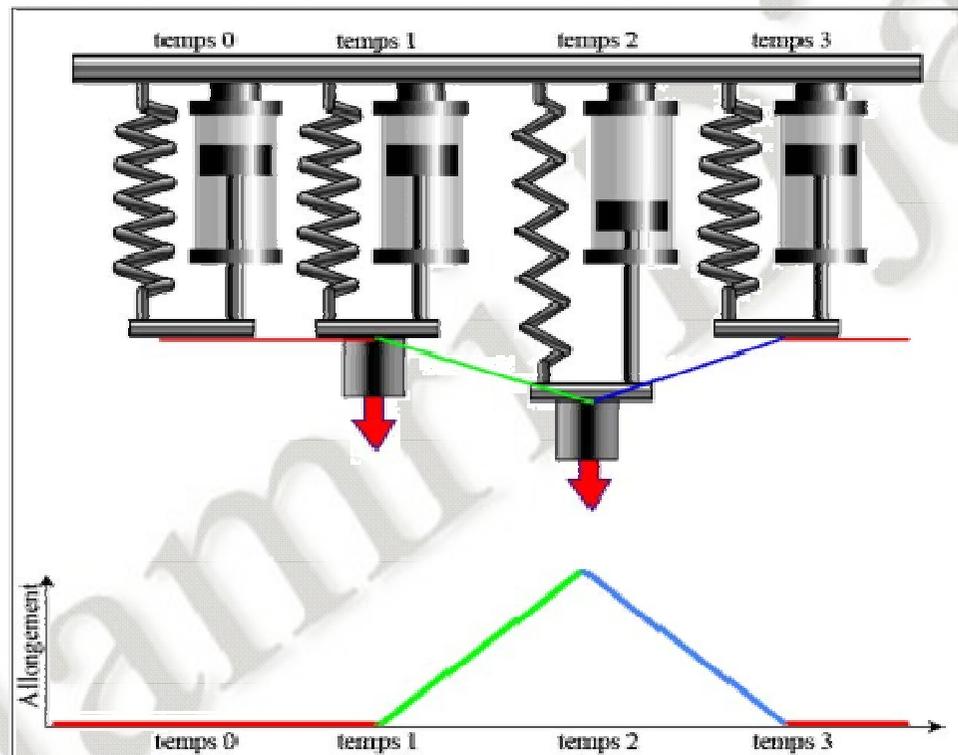
\* Après arrêt de la contrainte le matériau retrouve sa dimension initiale.

**Ressort et amortisseur en parallèle**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 4. La viscoélasticité:



**Figure 12.** Modèle de Kelvin-Voigt

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 4. La viscoélasticité:

#### \* **Le modèle viscoélastique avec déformation permanente:**

Après polymérisation, les élastomères sont les plus représentatifs du comportement viscoélastique.

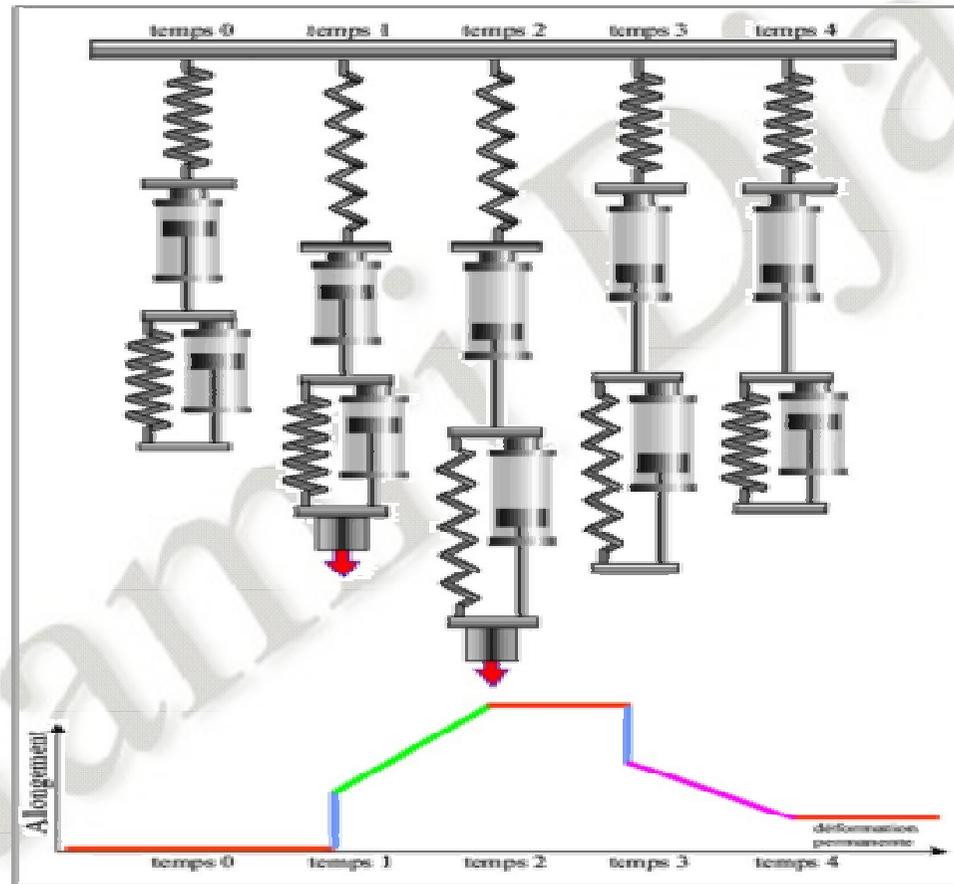
\* Les liaisons secondaires établies entre macromolécules ralentissent la déformation lors de la mise en charge.

\* Freinées par leur encombrement, les macromolécules provoquent la déformation résiduelle après arrêt de contrainte.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 4. La viscoélasticité:



**Figure 13 :** Modèle viscoélastique avec déformation permanente

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 4. La viscoélasticité:

#### **Récapitulatif:**

- \* Le modèle de la figure 12 est trop simple. En réalité, le mécanisme est plus complexe et il est mieux décrit dans la figure 13.
- \* La majorité des matériaux ont un comportement entre solide et liquide.
- \* La relation contrainte-déformation est **indépendante du temps** pour la plupart des solides.

On peut également mesurer le comportement viscoélastique du corps par des mesures mécaniques en **fonction du temps** tel que:

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 4. La viscoélasticité:

#### \* **La relaxation :**

C'est la relation entre la déformation imposée sur un corps élastique, visqueux ou viscoélastique et la contrainte qui en résulte en fonction du temps.

**La relation est dite fonction de relaxation.**

#### \* **Le fluage:**

C'est la réponse en déformation en fonction du temps de fluides viscoélastiques ou de solides viscoélastiques à l'application d'une contrainte.

**La réponse est dite fonction de fluage.**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 4. La viscoélasticité:

Il est possible de distinguer deux comportements viscoélastiques différents sous une charge:

\* Un solide viscoélastique montre une relaxation partielle de la contrainte dans les premiers instants puis se stabilise. Cette stabilisation de déformation sous charge est caractéristique du solide.

\* Un liquide viscoélastique montre une relaxation totale de la contrainte. Il n'y a pas de stabilisation de la déformation sous charge. Il y a une déformation permanente résiduelle caractéristique des liquides

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 5. L'anélasticité:

La définition de l'anélasticité, se base sur les trois postulats suivants:

a. Pour chaque contrainte, il existe une seule valeur d'équilibre de déformation, et vice versa:

**Elasticité idéale**

b. La réponse n'atteint un état d'équilibre qu'après un temps suffisant:

**Le recouvrement dépend du temps**

c. La relation contrainte-déformation est linéaire:

**Elasticité idéale**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 5. L'anélasticité:

a. Pour chaque contrainte, il existe une seule valeur d'équilibre de déformation, et vice versa:

**Elasticité idéale**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

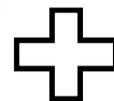
### 5. L'anélasticité:

Interprétation du premier postulat :

**La réponse est quasi statique**



La réponse est en équilibre thermodynamique



La réponse est réversible



**Introduction d'une substance (fonction) thermodynamique « P »**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 5. L'anélasticité:

b. La réponse n'atteint un état d'équilibre qu'après un temps suffisant:

**Le recouvrement dépend du temps**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 5. L'anélasticité:

**Remarque très importante pour le deuxième postulat:**

**Le recouvrement dépend du temps**

**≠**

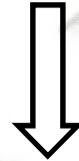
**Absence de la réponse instantanée**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

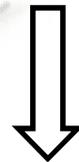
## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 5. L'anélasticité:

**!!! Absence d'instantanéité !!!**



**La réponse de tout matériau anélastique se développe en fonction du temps !!!**



**On tombe sur le cas particulier (irréaliste) d'un matériau sans aucun composant de comportement élastique !!!**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

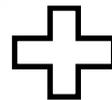
### 5. L'anélasticité:

Interprétation du deuxième postulat :

**Le recouvrement dépend du temps**



Réponse instantanée (élastique)



Réponse élastique dépendante du temps



La réponse est élastique « instantanée » et « dépendante du temps ».

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 5. L'anélasticité:

c. La relation contrainte-déformation est linéaire:

**Elasticité idéale**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

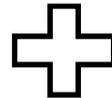
### 5. L'anélasticité:

Interprétation du troisième postulat :

**La définition de la linéarité ici a le sens suivant:**



La contrainte  $\sigma_1(t)$  produit la déformation  $\varepsilon_1(t)$



La contrainte  $\sigma_2(t)$  produit la déformation  $\varepsilon_2(t)$



Les contraintes  $\sigma_1(t) + \sigma_2(t)$  produisent les déformations  $\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 5. L'anélasticité:

Premier postulat:

- \* Un seul état d'équilibre entre « Contrainte-Déformation ».
- \* Existence du phénomène de recouvrement total.

### **Solide thermodynamique**

Les matériaux plastiques et viscoélastique ne sont pas définis comme solide thermodynamique

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 5. L'anélasticité:

Deuxième postulat:

\* L'auto-ajustement d'un système thermodynamique en réponse à un changement dans une variable externe vers un nouvel état d'équilibre prend du temps.

### **Phénomène de relaxation**

Lorsque la variable externe est mécanique (une contrainte ou une déformation), le phénomène est connu sous le nom de relaxation anélastique (ou relaxation mécanique).

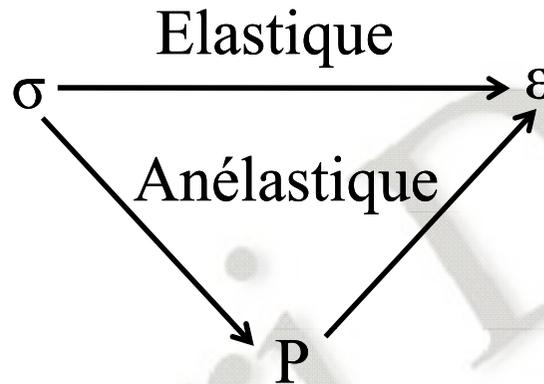
# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 5. L'anélasticité:

$\sigma$ : Contrainte

$\varepsilon$ : Déformation



$P$ : Substances thermodynamiques (Variables internes)

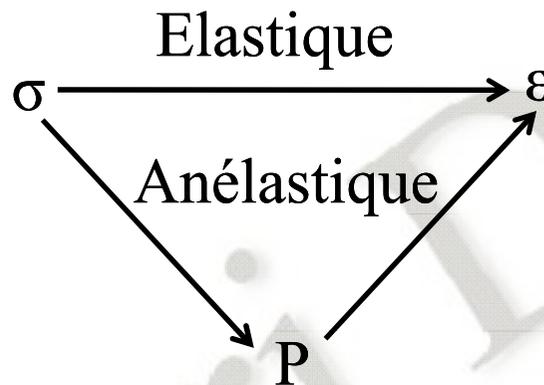
Pour simplifier les choses en va prendre qu'une seule variable interne significative (fonction)

Donc cette variable est influencée par la contrainte et contribue à la déformation du matériau

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 5. L'anélasticité:



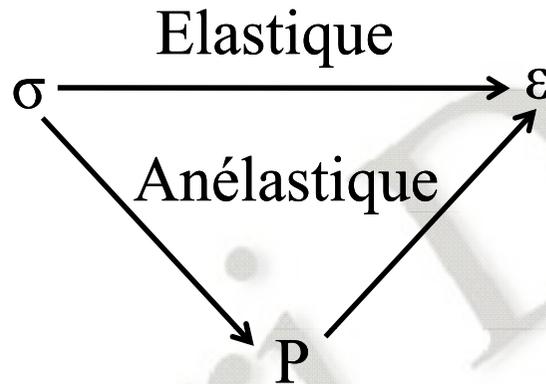
\* Cela veut dire que la contrainte n'est plus directement liée seulement à la déformation par l'accouplement purement élastique, mais elle est également liée indirectement par la variable interne  $P$ .

\* On note aussi que la variable «  $P$  » devient «  $\dot{P}$  » pour chaque équilibre atteint correspondant à un couplage « contrainte-déformation » donnée.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 5. L'anélasticité:



\* Pour obtenir un comportement anélastique, la relaxation «  $P$  »  $\rightarrow$  «  $\dot{P}$  » doit se faire à une vitesse finie plutôt qu'instantanément.

\* Un tel comportement se produira toujours lorsqu'un changement dans la variable (fonction) «  $P$  » implique un processus de transport.

**Exemple:**

si «  $P$  » était un paramètre caractérisant l'état d'ordre dans un alliage, un changement de «  $P$  » nécessiterait une migration atomique.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 5. L'anélasticité:

En résumé:

\* La relaxation anélastique est intrinsèquement une relaxation thermodynamique qui résulte d'un couplage entre contraintes et déformations via certaines variables (fonctions) internes qui ne peuvent évoluer vers de nouvelles valeurs d'équilibre que par des processus cinétiques tels que la diffusion.

\* La manifestation externe de ce comportement de relaxation interne est la dépendance temporelle.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

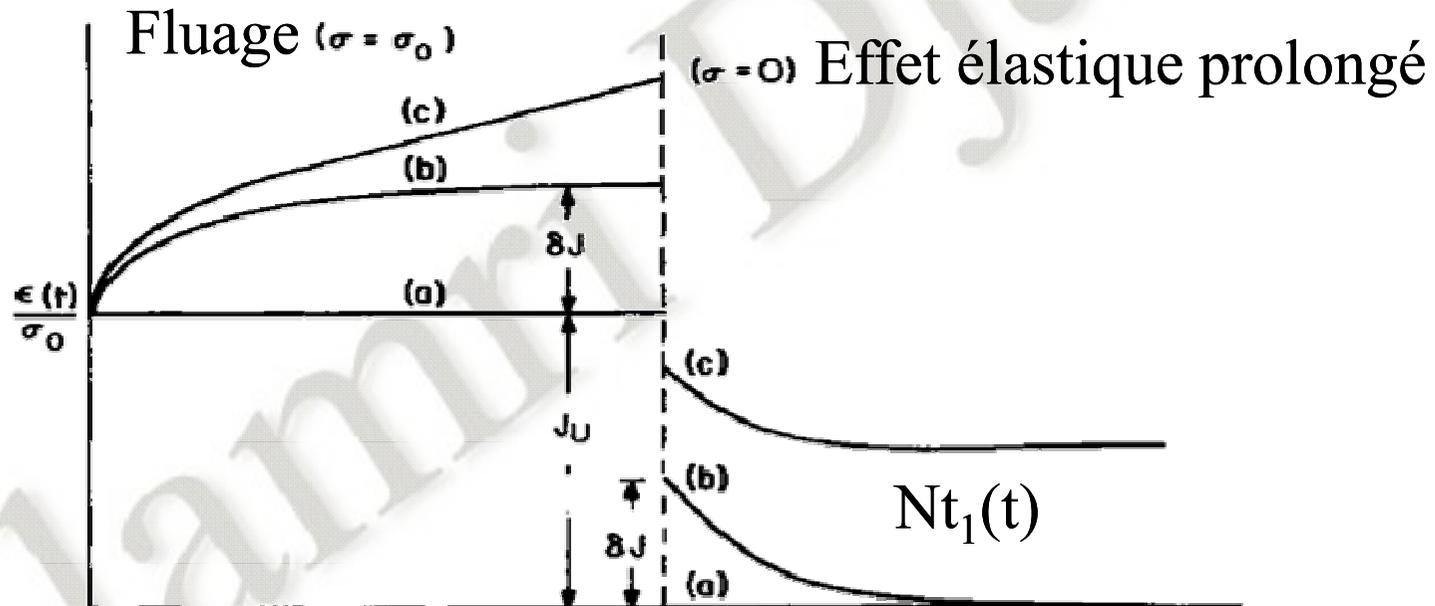
Une expérience dans laquelle une contrainte ou une déformation appliquée est maintenue constante pendant une période de temps donnée est appelée « **fonction quasi statique** ».

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.1. Fluage « J(t) »:



**Figure 14 :** Effet de fluage et effets élastiques prolongés pour (a) Un solide élastique idéal, (b) Un solide anélastique, et (c) Un solide viscoélastique linéaire

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.1. Fluage « J(t) »:

Dans l'expérience de fluage, une contrainte «  $\sigma_0$  » est appliquée brusquement à l'échantillon à l'instant  $t = 0$ , et maintenue constante pendant que la déformation «  $\varepsilon$  » est observée en fonction du temps. Les conditions expérimentales peuvent donc s'exprimer par:

$$\sigma = 0, t < 0$$

$$\sigma = \sigma_0, t \geq 0$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.1. Fluage « J(t) »:

Suite aux conditions précédentes, on peut définir la fonction de fluage  $J(t)$  par rapport au postulat de la linéarité de la façon suivante:

$$J(t) = \varepsilon / \sigma_0$$

Puisque la contrainte «  $\sigma_0$  » appliquée est constante la fonction de fluage  $J(t)$  est indépendante de la contrainte «  $\sigma_0$  ».

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.1. Fluage « J(t) »:

La relation «  $J(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0$  » est en effet une généralisation de la relation précédente «  $J = \varepsilon/\sigma$  » puisque la fonction « J(t) » devient tout simplement une fonction qui ne dépend pas du temps « J » pour un comportement élastique idéal.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.1. Fluage « $J(t)$ »:

La **Figure 14** montre une comparaison de la réponse de fluage d'un modèle solide idéal avec celui du solide anélastique et celui du solide viscoélastique linéaire plus général.

Le contraste entre les courbes (b) et (c) est particulièrement intéressant. Dans la courbe (c), après une période transitoire, la déformation augmente linéairement avec le temps, ce qui représente un fluage visqueux à l'état d'équilibre. D'autre part, en (b), la déformation se rapproche d'une valeur finale ou d'équilibre définie après un laps de temps suffisant. Ce comportement est conforme au deuxième postulat de l'anélasticité.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.1. Fluage « J(t) »:

La valeur initiale de « J(t) » est appelée la complaisance non relaxée, notée « J<sub>U</sub> », puisqu'il s'agit d'une mesure de la déformation qui se produit lorsqu'il n'y a pas de temps pour que la relaxation ait lieu:

$$\mathbf{J(0) \equiv J_U}$$

La valeur d'équilibre de J(t) atteinte après un temps suffisant dans le cas anélastique est appelée la complaisance relaxée notée « J<sub>R</sub> »

$$\mathbf{J(\infty) \equiv J_R}$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.1. Fluage « J(t) »:

On définit la quantité de «  $\delta J$  » appelée relaxation de complaisance:

$$\delta J \equiv J_R - J_U$$

Le comportement de fluage d'un matériau qui présente une élasticité est donc tel que sous l'application d'une contrainte unitaire.

La déformation augmente à partir d'une valeur instantanée  $J_U$  à une valeur finale d'équilibre  $J_R$ .

Le processus de fluage dépendant du temps est également appelé dans la littérature "relaxation de déformation" ou "élasticité retardée".

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.2. Recouvrement de fluage (effet élastique prolongé):

si, après un essai de fluage effectué pendant un temps «  $t$  » donné (pas nécessairement assez long pour atteindre l'équilibre), la contrainte est brusquement libérée, le retour élastique instantané est en général suivie d'une déformation qui dépend du temps.

C'est ce qu'on appelle l'effet élastique prolongé ou:

**« recouvrement de fluage ».**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.2. Recouvrement de fluage (effet élastique prolongé):

Compte tenu du postulat de la linéarité, la déformation est dépendante du temps  $\varepsilon(t)$  après la libération de la contrainte.

La contrainte doit à nouveau être proportionnelle à  $\sigma_0$ :

$$\sigma = 0, t < -t_1$$

$$\sigma = \sigma_0, -t_1 \leq t < 0$$

$$\sigma = 0, t \geq 0$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

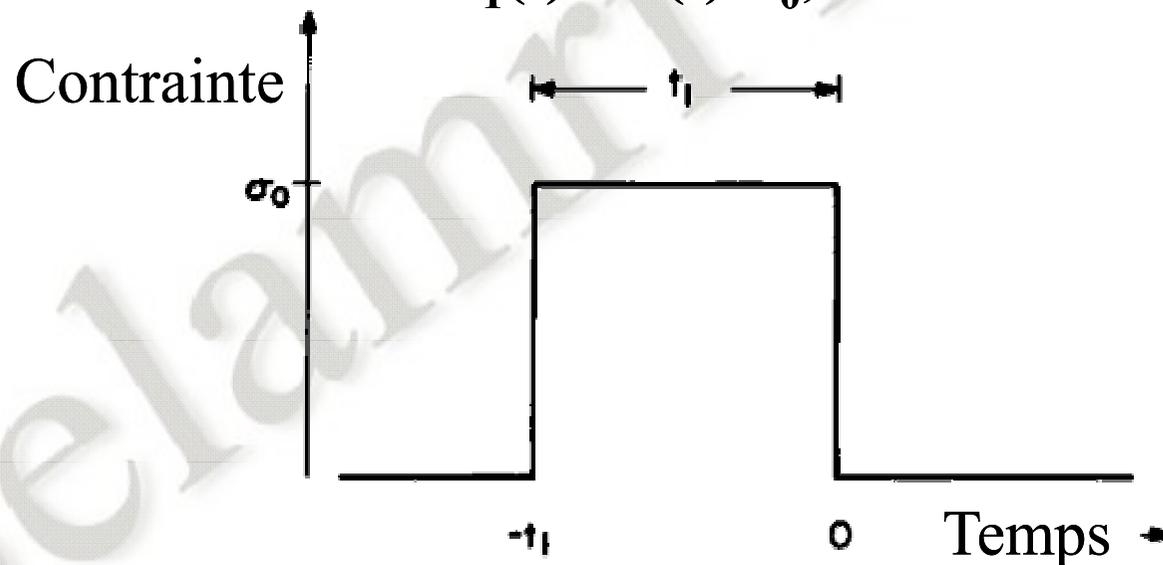
## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.2. Recouvrement de fluage (effet élastique prolongé):

On définit une fonction «  $Nt_1(t)$  » appelée fonction de l'effet élastique comme suite:

$$Nt_1(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0, t \geq 0$$



**Figure 15 :** Cycle de chargement (expérience d'effet élastique prolongé)

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.3. Relaxation des contraintes:

Dans l'expérience de relaxation des contraintes, une déformation «  $\varepsilon_0$  » est imposée à l'échantillon à l'instant  $t = 0$ , et maintenue constante pendant que la contrainte «  $\sigma$  » est observée en fonction du temps. Les conditions expérimentales peuvent donc s'exprimer par:

$$\varepsilon = 0, t < 0$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0, t \geq 0$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.3. Relaxation des contraintes:

Suite aux conditions précédentes, on peut définir la fonction de relaxation des contraintes  $M(t)$  par rapport au postulat de la linéarité de la façon suivante:

$$M(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0$$

Puisque la déformation «  $\varepsilon_0$  » appliquée est constante, la fonction de relaxation des contrainte  $M(t)$  est indépendante de la déformation «  $\varepsilon_0$  ».

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.3. Relaxation des contraintes:

Par analogie avec le cas du fluage, nous définissons le module non relaxé  $M_U$  comme le rapport  $\sigma(0)/\varepsilon_0$  de sorte que :

$$\mathbf{M(0) \equiv M_U}$$

A partir de la définition de l'anélasticité,  $M(t)$  doit finalement se rapprocher d'une valeur d'équilibre définie comme module relaxé  $M_R$ :

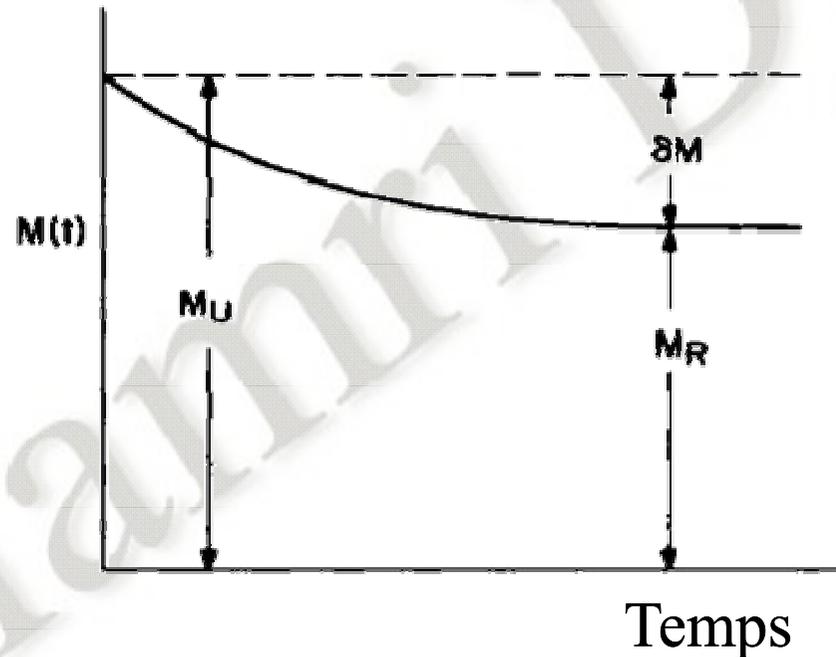
$$\mathbf{M(\infty) \equiv M_R}$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.3. Relaxation des contraintes:



**Figure 16 :** Relaxation des contraintes d'un solide anélastique

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.3. Relaxation des contraintes:

En se basant sur la relation d'équilibre unique entre la contrainte et la déformation, il s'ensuit que le module relaxé est la complaisance relaxée sont reliés par l'équation suivante:

$$\mathbf{M}_R \equiv 1/\mathbf{J}_R$$

La même forme de l'équation pour le module non relaxé et la complaisance non relaxée :

$$\mathbf{M}_U \equiv 1/\mathbf{J}_U$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.3. Relaxation des contraintes:

On définit la quantité de «  $\delta M$  » appelée relaxation du module:

$$\delta M \equiv M_U - M_R$$

Cela implique la relation suivante:

$$\delta M \equiv \delta J / (J_U \cdot J_R)$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.4. Normalisation de la fonction de relaxation des contraintes et des déformations):

Dans certains cas, il est souhaitable d'introduire une fonction de fluage normalisée «  $\psi(t)$  » définit pour  $t \geq 0$  de la façon suivante:

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{J}_U + \delta\mathbf{J}.\psi(t)$$

Avec la variation de la fonction de fluage normalisé «  $\psi(t)$  » d'une façon monotone entre les valeurs extrêmes:

$$\psi(0) = 0$$

$$\psi(\infty) = 1$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.4. Normalisation de la fonction de relaxation des contraintes et des déformations):

Il est également pratique de définir une quantité sans dimension «  $\Delta$  » appelée force relaxée de la façon suivante:

$$\Delta = \delta J / J_U = \delta M / M_R$$

En conséquence la relation ci-dessous peut être déduite:

$$J(t) = J_U [1 + \Delta \cdot \psi(t)]$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.4. Normalisation de la fonction de relaxation des contraintes et des déformations):

D'une façon similaire, on peut introduire une fonction de contrainte relaxée normalisée «  $\varphi(t)$  » définit pour  $t \geq 0$  de la façon suivante:

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_R + \delta\mathbf{M} \cdot \varphi(t)$$

Avec la variation de la fonction de contrainte relaxée normalisé «  $\varphi(t)$  » d'une façon monotone entre les valeurs extrêmes:

$$\varphi(0) = 1$$

$$\varphi(\infty) = 0$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 6. Les fonctions quasi-statiques:

#### 6.4. Normalisation de la fonction de relaxation des contraintes et des déformations):

On utilisant la quantité sans dimension «  $\Delta$  » appelée force relaxée en obtient la relation suivante:

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_R [1 + \Delta \cdot \varphi(t)]$$

Avec:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_R &= \mathbf{J}_U [1 + \Delta] \\ \mathbf{M}_U &= \mathbf{M}_R [1 + \Delta] \end{aligned}$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:

- \* Les expériences quasi-statiques décrites précédemment servent à obtenir des informations sur le comportement des matériaux sur des périodes relativement longues (plusieurs secondes).
- \* Pour avoir plus d'informations sur le comportement d'un matériau à des périodes relativement plus courtes, les expériences dynamiques sont les plus appropriées.
- \* Dans ces expériences, une contrainte (ou déformation) périodique dans le temps est imposée au système, et l'angle de déphasage en retard de la déformation par rapport à la contrainte est déterminé.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:

Ce type d'étude pour ce comportement du système est mieux décrite à l'aide d'une notation complexe de la façon suivante:

Soit la contrainte imposée :

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \exp[i(\omega t)]$$

$\sigma_0$  : Amplitude de contrainte.

$\omega = 2\pi f$  : Impulsion de vibration ( $f$  : Fréquence de vibration).

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:

On respectant l'exigence du postulat de la linéarité dans la relation existante entre « Contrainte - Déformation » la déformation doit être périodique avec la même fréquence que la contrainte donc elle est exprimable sous la forme :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \exp[i(\omega t - \phi)]$$

$\varepsilon_0$  : Amplitude de déformation.

$\omega = 2\pi f$  : Impulsion de vibration ( $f$  : Fréquence de vibration).

$\phi$  : déphasage en retard de la déformation par rapport à la contrainte

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:

\* Pour un comportement élastique idéal on peut revenir aux relations précédentes avec :

$$\begin{aligned}\phi &= 0 \\ \varepsilon/\sigma &= \mathbf{J}\end{aligned}$$

\* Pour un comportement anélastique on peut revenir aux relations précédentes avec :

$$\begin{aligned}\phi(\omega) &\neq 0 \text{ (En générale)} \\ \mathbf{J}^*(\omega) &\equiv \varepsilon/\sigma = |\mathbf{J}|(\omega).\exp[-i\phi(\omega)]\end{aligned}$$

$\mathbf{J}^*(\omega)$  : Complaisance complexe en fonction de «  $\omega$  ».

$\phi(\omega)$  : déphasage en fonction de «  $\omega$  ».

$|\mathbf{J}|(\omega)$ : La valeur absolue de la complaisance dynamique.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:

Dans le cadre de cette description, deux fonctions de réponse dynamique réelle d'un matériau ont été définies, à savoir «  $|J|(\omega)$  » et «  $\phi$  ». Il est également commode d'introduire deux autres fonctions de réponse réelles qui sont très étroitement liées à «  $|J|(\omega)$  » et «  $\phi$  ».

Mais tout d'abord on va utiliser une autre écriture de déformation :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1 - i\varepsilon_2) \cdot \exp[i(\omega t)]$$

$\varepsilon_1$ : Amplitude de déformation en phase avec la contrainte.

$\varepsilon_2$ : Amplitude de déformation qui est déphasé de  $\pi/2$  avec contrainte.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:

On divisant la relation précédente par la contrainte  $\sigma$  on obtiendra alors la relation suivante :

$$\mathbf{J}^*(\omega) = \mathbf{J}_1(\omega) - i\mathbf{J}_2(\omega)$$

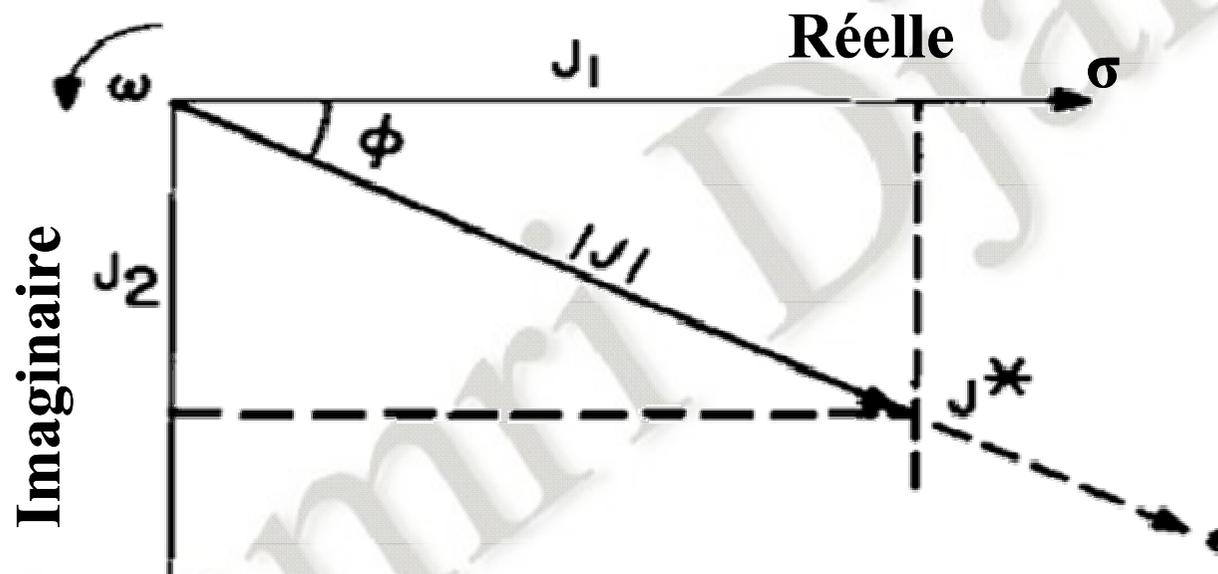
$J_1(\omega) = \varepsilon_1/\sigma_0$  : La partie réelle de  $J^*(\omega)$  appelée  
« **Complaisance emmagasinée** ».

$J_2(\omega) = \varepsilon_2/\sigma_0$  : La partie imaginaire de  $J^*(\omega)$  appelée  
« **Complaisance dissipée** ».

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:



**Figure 17.** Diagramme vectoriel dans le plan complexe montrant les relations de phase entre la contrainte, la déformation et la conformité complexe. Le diagramme entier tourne autour de l'origine avec une fréquence gulaire  $\omega$ .

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:

A partir du diagramme vectoriel précédent on obtiendra ce que suit:

$$|\mathbf{J}|^2 = \mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2$$
$$\text{tang}(\phi) = \mathbf{J}_2/\mathbf{J}_1$$

Par analogie à la complaisance, on peut définir le module complexe :

$$\mathbf{M}^*(\omega) \equiv \sigma/\varepsilon = |\mathbf{M}|(\omega).\exp[i\phi(\omega)]$$

$\mathbf{M}^*(\omega)$  : Module complexe en fonction de «  $\omega$  ».

$\phi(\omega)$  : déphasage en fonction de «  $\omega$  ».

$|\mathbf{M}|(\omega)$ : La valeur absolue du module dynamique.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:

Par conséquent, on peut écrire ce que suit:

$$\mathbf{M}^*(\omega) = [\mathbf{J}^*(\omega)]^{-1}$$

$$|\mathbf{M}|(\omega) = [|\mathbf{J}|(\omega)]^{-1}$$

$$\mathbf{M}^*(\omega) = \mathbf{M}_1(\omega) + i\mathbf{M}_2(\omega)$$

$$|\mathbf{M}|^2 = \mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_2^2$$

$$\text{tang}(\phi) = \mathbf{M}_2/\mathbf{M}_1$$

$$\mathbf{J}_2/\mathbf{J}_1 = \mathbf{M}_2/\mathbf{M}_1$$

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{M}_1/|\mathbf{M}|^2 = [\mathbf{M}_1(1 + \text{tang}^2(\phi))]^{-1}$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{J}_2/|\mathbf{J}|^2$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:

Il faut noter que si:

$$\mathbf{M}^*(\omega) = [\mathbf{J}^*(\omega)]^{-1}$$

On peut pas avoir la réciprocity pour  $J_1$  avec  $M_1$  ni  $J_2$  avec  $M_2$  :

$$\mathbf{J}_1 \neq 1/\mathbf{M}_1$$

$$\mathbf{J}_2 \neq 1/\mathbf{M}_2$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:

Pour les déphasages «  $\phi$  » relativement petit, l'approximation suivante peut être très utile :

$$\phi^2 \ll 1 \Rightarrow \text{tang}(\phi) = \phi(1 + \phi^2/3 + \dots) \approx \phi$$

Cette approximation engendre les relations suivantes:

$$\mathbf{M}_1 = |\mathbf{M}|$$

$$\mathbf{J}_1 = |\mathbf{J}|$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{J}_1^{-1}$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:

Pour les fréquences suffisamment petites les déformations  $\varepsilon$  sont proportionnelles aux contraintes  $\sigma$ :

$$\mathbf{J}^*(0) = 1/\mathbf{M}^*(0) = \mathbf{J}_R$$

Inversement, pour les fréquences suffisamment grandes on peut avoir :

$$\mathbf{J}^*(\infty) = 1/\mathbf{M}^*(\infty) = \mathbf{J}_U$$

Par analogie aux relation  $J(0) = J_U$  et  $J(\infty) = J_R$  on peut écrire:

$$\mathbf{J}_2(0) = \mathbf{J}_2(\infty) = \mathbf{0} \text{ [Idem pour } M_2(\omega)\text{]}$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:

Les significations de la complaisance emmagasinée ( $J_1$ ) et la complaisance dissipée ( $J_2$ ) sont éclaircies par le calcul respectif de l'énergie emmagasinée et l'énergie dissipée pour un cycle de vibration d'où l'énergie par unité de volume pour n'importe quelle phase du cycle s'écrit comme suite:

$$\int \sigma \cdot d\varepsilon$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:

L'énergie dissipée dans un cycle par unité de volume s'écrit donc:

$$\Delta W = \int \sigma \cdot d\varepsilon = \pi \cdot J_2 \cdot \sigma_0^2$$

L'énergie maximale emmagasinée par unité de volume s'écrit donc:

$$W(\omega t = 0 \rightarrow \omega t = \pi/2) = \int \sigma \cdot d\varepsilon = (J_1/2) \cdot \sigma_0^2$$

Le ratio de l'énergie dissipée par rapport à l'énergie maximale emmagasinée « Capacité d'amortissement spécifique » s'écrit donc:

$$\Delta W/W = 2\pi \cdot (J_2/J_1) = 2\pi \cdot \text{tang}(\phi) \quad (\phi: \text{Angle de perte})$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:

De la même manière pour une déformation donnée:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

$$\sigma = M^* \varepsilon$$

$$M^*(\omega) = M_1(\omega) + iM_2(\omega)$$

On à:

$$\Delta W = \pi \cdot M_2 \cdot \varepsilon_0^2$$

$$W = (M_1/2) \cdot \varepsilon_0^2$$

$$\Delta W/W = 2\pi \cdot (M_2/M_1) = 2\pi \cdot \tan(\phi)$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 7. Les fonctions de réponse dynamique primaire:

#### Résumé:

\* La description ci-dessus du comportement dynamique des solides anélastiques nous laisse le choix entre plusieurs paires de fonctions de réponse dynamique pouvant désigner les propriétés du matériau:

$[|J|(\omega), \phi(\omega)]$ ,  $[J_1(\omega), J_2(\omega)]$ ,  $[|M|(\omega), \phi(\omega)]$ ,  $[M_1(\omega), M_2(\omega)]$ .

\* Chacune des quatre paires de fonctions de réponse peut être convertie en une autre paire au moyen des équations données ci-dessus.

\* En raison du fait que  $\phi$  (ou  $\tan(\phi)$ ) donne une mesure de la perte d'énergie par cycle due au comportement anélastique, la quantité «  $\phi$  » est généralement connu par le nom de « **Frottement intérieur** » du matériaux.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

Les fonctions de réponse dynamique considérées précédemment ne peuvent être mesurées directement que dans une expérience réalisée à des fréquences bien inférieures à toutes les résonances du système mécanique utilisé.

Une telle expérience, appelée « Sous-résonance », est très simple à réaliser. Il suffit de mettre un échantillon en vibration forcée à une fréquence  $\omega$  et de mesurer les amplitudes des contraintes et déformations et leurs phases relatives pour obtenir  $\phi(\omega)$  et  $|J(\omega)|$  ou  $J_1(\omega)$  et  $J_2(\omega)$ .

Ces fonctions dynamiques sont **théoriquement** les plus utiles et, en fait, sont tout ce qui est nécessaire pour le développement de la théorie formelle de l'anélasticité.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

**Pratiquement**, la mesure de l'angle de phase  $\phi(\omega)$  est difficile lorsqu'il est très faible, ce qui est généralement le cas pour les matériaux cristallins.

Par conséquent, les méthodes « Sous-résonantes » ne sont généralement pas utilisées. Au lieu de cela, les matériaux élastiques sont généralement testés à des fréquences où l'inertie du système est appréciable.

Ces méthodes sont commodément divisées en deux types :

- a) Les méthodes utilisant des systèmes vibrant en résonance à une fréquence propre, soit en système forcée ou en système libre
- b) Les méthodes utilisant la propagation d'onde.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

\* En général, un système résonnant doit avoir deux éléments :  
- Elément "élastique" (qui peut en fait être anélastique)  
- Inertie.

\* La situation est considérablement simplifiée lorsqu'on ajoute un élément d'inertie rigide qui est grand par rapport à l'inertie de l'échantillon.

\* Un tel système n'a qu'un seul degré de liberté, puisque le mouvement du système peut être décrit complètement en termes d'une seule coordonnée.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

\* La grandeur  $F_s$  est la variable de force conjuguée de  $x$ . Elle sont, respectivement, proportionnelles à la contrainte et à la déformation à un point choisi de l'échantillon. Si nous choisissons le point de contrainte maximale nous pouvons écrire:

$$F_s = C_1 \sigma_{\max} \text{ et } x = C_2 \varepsilon_{\max}$$

Le constantes  $C_1$  et  $C_2$  dépendent de la forme et les dimensions de l'échantillon.

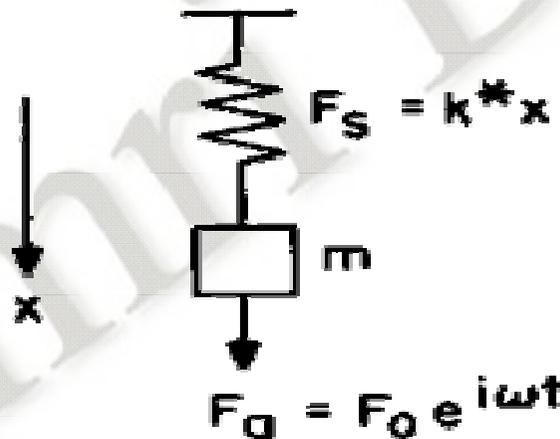
# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

\* Le modèle qui peut être utilisé pour représenter le système résonnant avec un degré de liberté est celui d'une masse sur un ressort :



**Figure 18.** Modèle mécanique pour un système résonnant à un degré de liberté, incorporant un ressort anélastique.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

##### a. Systèmes forcé:

\* Un système est dit forcé lorsqu'il est soumis à une force extérieure que l'on définit (système vibratoire):

$$F_a = F_0 \cdot \exp[i(\omega t)]$$

\* Lorsque le matériau de l'échantillon est parfaitement élastique, la force  $F_s$  que la masse exerce sur le ressort peut s'écrire  $F_s = kx$ , où  $k$  est la constante du ressort.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

##### a. Systèmes forcé:

\* Lorsque le matériau de l'échantillon est parfaitement élastique, la force  $F_s$  que la masse exerce sur le ressort peut s'écrire  $F_s = kx$ , où  $k$  est la constante du ressort.

\* Par contre, si l'échantillon est anélastique tel que  $\sigma = M^*\varepsilon$  (où  $M^*$  est en général une grandeur complexe), il faut prévoir une constante de ressort complexe  $k^*$  dans le modèle actuel:

$$F_s = k^* \cdot x = k_1 \cdot [1 + i \tan(\phi)] \cdot x$$
$$x = x_0^* \cdot \exp[i(\omega t)] = x_0 \cdot \exp[i(\omega t - \phi)]$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

##### a. Systèmes forcé:

\* L'équation de mouvement du système s'écrit généralement de la façon suivante:

$$m\ddot{x} + F_s = F_a$$

\* La solution de cette équation engendre une solution dont l'amplitude dépend de la fréquence de la force appliquée à savoir  $F_a$ .

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

##### a. Systèmes forcé:

\* L'amplitude  $x_0$  et l'angle de déphasage  $\theta$  s'écrivent donc:

$$x_0^2 = |x_0^*|^2 = (F_0/m)^2 / [(\omega_r^2 - \omega_F^2)^2 + \omega_r^4 \cdot \text{tang}^2(\phi)]$$

$$\omega_r^2 \equiv k_1/m$$

$$\text{tang}(\theta) = \omega_r^2 \cdot \text{tang}(\phi) / (\omega_r^2 - \omega_F^2)$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

##### a. Systèmes forcé:

\* Les équations ci-dessus peuvent être simplifiées on admettant  $\phi \ll 1$ :

$$x_0^2 = |x_0^*|^2 = (F_0/m)^2 / [4(\omega_F - \omega_r)^2 + \omega_r^2 \cdot \phi(\omega_F)] \cdot \omega_r^2$$

$$\omega_F + \omega_r \approx 2 \cdot \omega_r \text{ et } (\omega_r^2 - \omega_F^2) \approx (\omega_r - \omega_F) \cdot 2 \cdot \omega_r$$

$$\phi(\omega_F) \approx \phi(\omega_r) = C^{te}$$

et

$$k_1(\omega_F) \approx k_1(\omega_r) = C^{te}$$

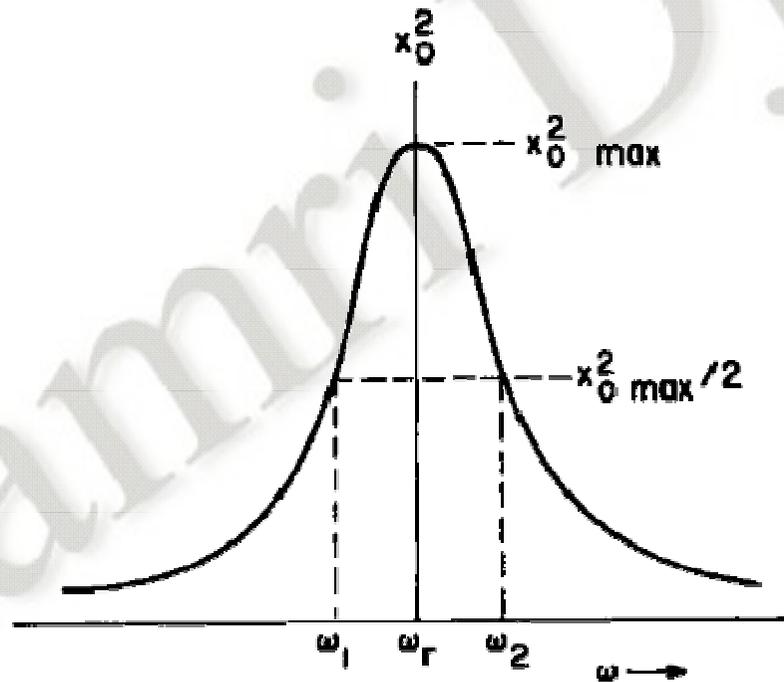
# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

Avec ( $\alpha = C^{te}$ )  $\Rightarrow x_0^2$  (proportionnelle à)  $[(\omega_F - \omega_r)^2 + \omega_r^2 \cdot \alpha^2]^{-1}$



**Figure 19.** Forme Lorentzienne pour le pic de résonance en vibration forcée.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

##### a. Systèmes vibratoires forcés:

$$(\omega_2 - \omega_1)/\omega_r \equiv Q^{-1} = \phi$$

Où cette définition de « Q » correspond à celle couramment utilisée dans la description des circuits électriques résonnants.

Cette relation montre que l'angle de perte «  $\phi$  », qui est une mesure du frottement intérieur du système, peut être obtenu directement à partir de la largeur mi-hauteur du pic de résonance dans la courbe d'amplitude au carré en fonction de la fréquence.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

##### a. Systèmes vibratoires forcés:

**Remarque:** Cette relation est valide pour des valeurs de:

$$\phi \ll 1 \Rightarrow (\omega_2 - \omega_1) \ll \omega_r \text{ (Pic de résonance aigu: pic de Lorentz)}$$

\* Il y a cependant une deuxième quantité importante obtenue dans l'expérience de résonance, à savoir la fréquence de résonance elle-même.

\* La fréquence de résonance «  $\omega_r$  » est liée au moment d'inertie et la constante dynamique de la force de rappelle «  $k_1$  ».

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

##### a. Systèmes vibratoires forcés:

\*  $k^*$  (proportionnelle)  $M^*$ , la partie réelle  $k_1$  est proportionnelle à la partie réelle du module complexe  $M_1(\omega)$  et inversement proportionnelle à  $J_1(\omega)$ .

$$\omega_r^2 \text{ (proportionnelle) } M_1(\omega_r) = [J_1(\omega_r)]^{-1}$$

\* Pour des valeurs de «  $\phi$  » supérieures la courbe de la figure 19 devient asymétrique.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

##### b. Systèmes vibratoires libres:

\* En plus de l'utilisation de la réponse de résonance en vibration forcée, la méthode la plus ancienne et la plus populaire pour obtenir la réponse anélastique dynamique consiste à mesurer la décroissance ou l'amortissement des vibrations libres d'un système.

\* L'équation de mouvement du système libre s'écrit généralement de la façon suivante:

$$m\ddot{x} + F_S = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + k_1.[1 + i \tan(\phi)].x = 0$$

$$\text{Avec: } x = x_0.\exp[i(\omega^*t)] \text{ et } \omega^* = \omega_0.[1 + i\delta/2\pi]$$

$$x = x_0.\exp[-\delta f_0 t].\exp[i(\omega_0 t)] \equiv A(t).\exp[i(\omega_0 t)]$$

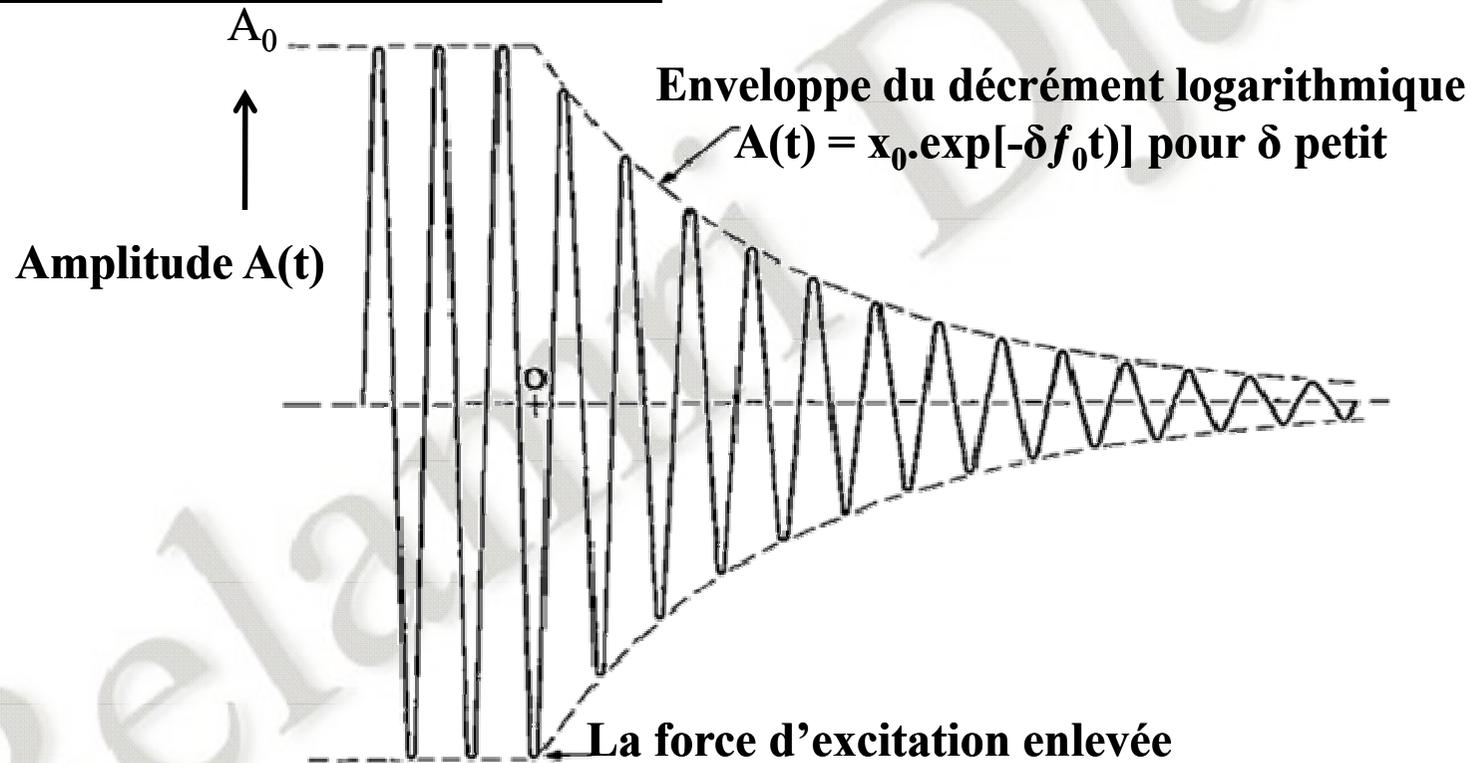
# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

##### b. Systèmes vibratoires libres:



**Figure 20.** Le décroissement logarithmique de l'amplitude (fonction enveloppe) dans le cas des vibrations libres d'un solide anélastique.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

##### b. Systèmes vibratoires libres:

\* Lorsque cette solution «  $x = x_0 \cdot \exp[-\delta f_0 t] \cdot \exp[i(\omega_0 t)]$  » est substituée dans l'équation «  $m\ddot{x} + k_1 \cdot [1 + i \tan(\phi)] \cdot x = 0$  », et que les parties réelle et imaginaire sont comparées séparément, on constate que:

$$\omega_0^2 = k_1 / [1 - (\delta^2 / 4\pi^2)] \approx k_1 / m$$

$$\delta \approx \pi\phi$$

$$\delta = \ln(A_n / A_{n+1}) \text{ (le décrement logarithmique)}$$

\* L'impulsion «  $\omega_0$  » dans le cas des oscillations libre est égale à l'impulsion «  $\omega_r$  » dans le cas des oscillations forcées.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 1. Systèmes résonnants à forte inertie externe:

##### b. Systèmes vibratoires libres:

\* Pour les déphasages «  $\phi$  » relativement petit, l'approximation suivante peut être très utile :

$$\phi^2 \ll 1 \Rightarrow \text{tang}(\phi) = \phi(1 + \phi^2/3 + \dots) \approx \phi$$

Cette approximation engendre les relations suivantes:

$$Q^{-1} = \phi = \delta/\pi = \Delta W/2\pi W$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 2. Méthode de propagation d'onde:

\* Dans la méthode par résonance à forte inertie externe un échantillon est soumis à une vibration dans l'un de ses modes naturels, de sorte qu'une onde stationnaire est installée dans l'échantillon. Ces ondes stationnaires sont produites par l'interférence d'ondes progressives se déplaçant dans des directions opposées suite à des réflexions successives des extrémités de l'échantillon.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 2. Méthode de propagation d'onde:

\* En revanche, les méthodes de propagation des ondes utilisent une onde se déplaçant le long de l'échantillon dans une seule direction à la fois ; les effets d'interférence sont alors absents. Ceci peut être accompli par propagation continue d'une onde dont la longueur est petite par rapport à la longueur de l'échantillon et l'amortissement est assez élevé pour que l'absorption soit complète avant que l'onde n'atteigne l'extrémité libre.

**Plus Généralement, pour les matériaux cristallins où l'amortissement est généralement faible, la méthode de propagation d'impulsions est utilisée.**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 2. Méthode de propagation d'onde:

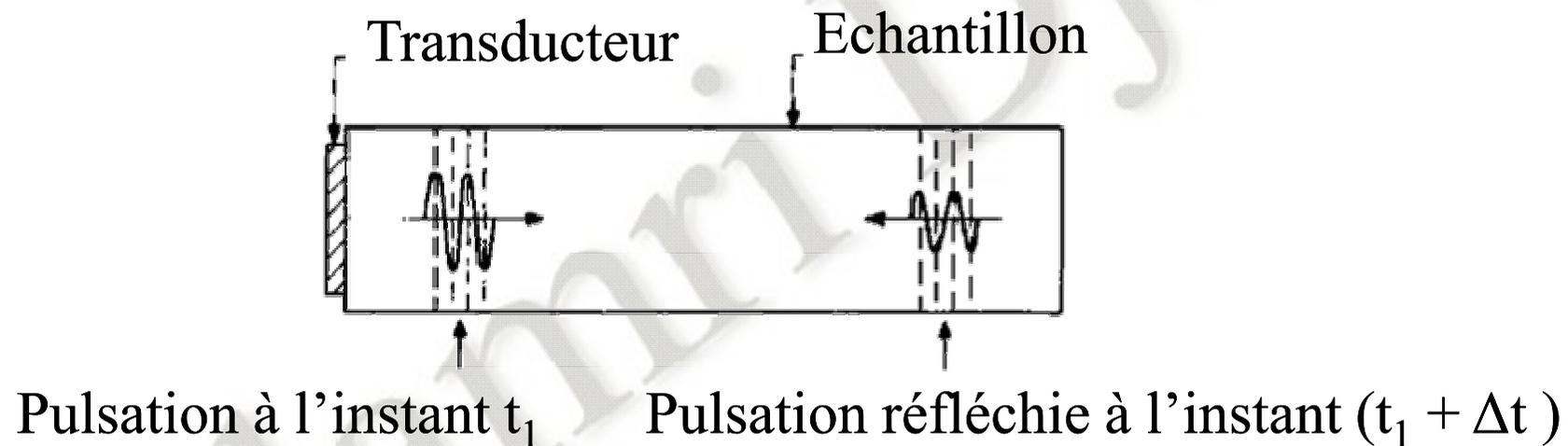
\* Cette méthode utilise une impulsion ou une onde générée sur l'une des extrémités de l'échantillon. La vitesse d'une telle impulsion peut être déterminée à partir du moment où elle atteint l'autre extrémité, ou à partir de l'instant où elle revient au point de départ après sa réflexion sur l'autre extrémité libre. Tandis que l'atténuation de l'impulsion peut être déterminée par la diminution de l'amplitude après réflexions successives.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 2. Méthode de propagation d'onde:



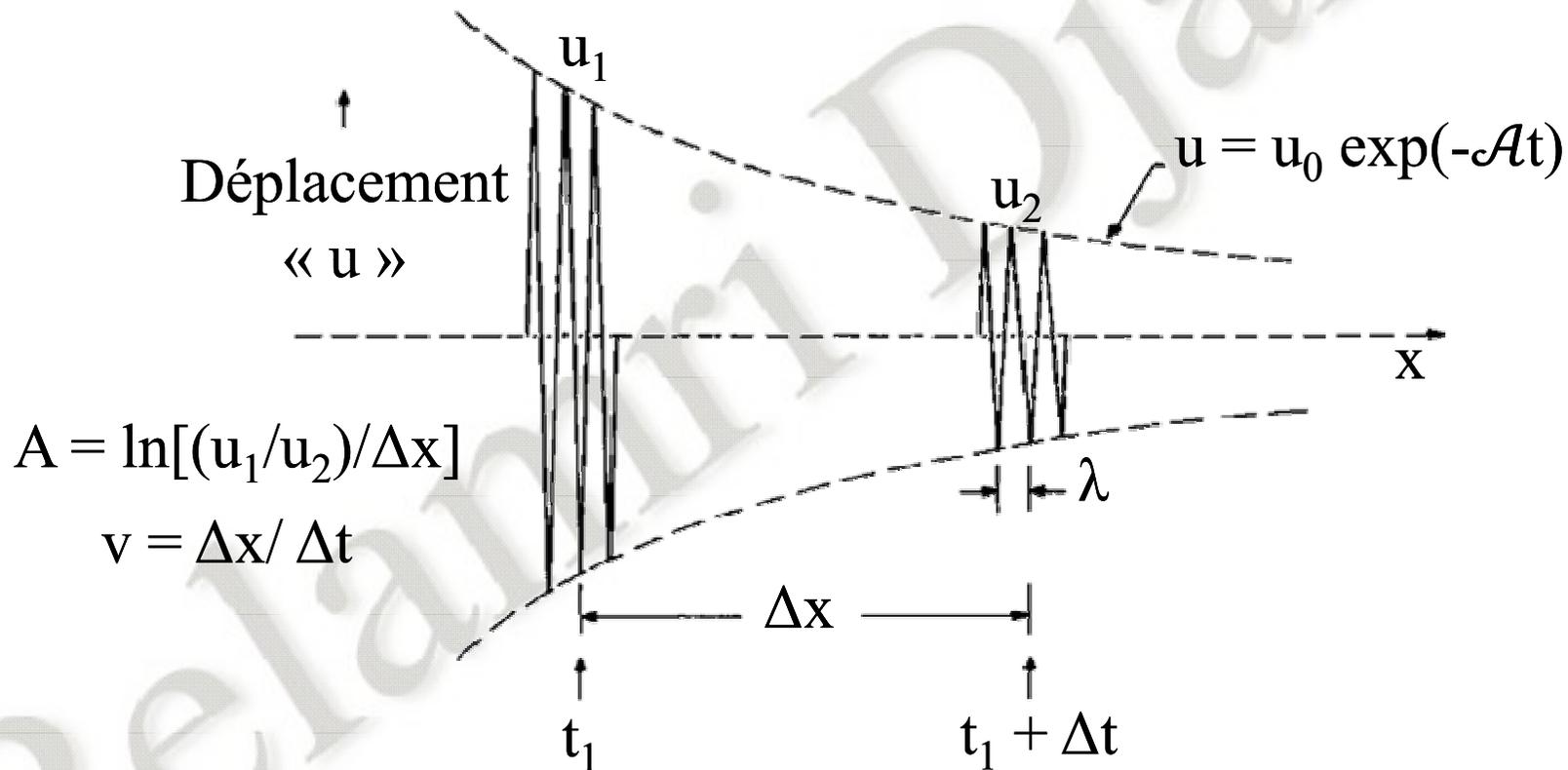
**Figure 21.** Illustration schématique de la méthode des impulsions ultrasonores.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 2. Méthode de propagation d'onde:



**Figure 22.** Atténuation d'une impulsion ultrasonore se propageant à travers un milieu anélastique.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 2. Méthode de propagation d'onde:

\* L'équation de propagation d'onde dans un milieu élastique, suivant une direction donnée, s'exprime généralement de la façon suivante:

$$\rho \partial^2 u / \partial t^2 = M \partial^2 u / \partial x^2$$

$\rho$ : La densité du milieu

M: Le module de Young

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 2. Méthode de propagation d'onde:

\* Pour les matériaux anélastiques, si le mouvement est strictement harmonique (fréquence circulaire  $\omega$ ), le module « M » peut être remplacé par le module complexe « M\* ». Dans ce cas, nous avons

$$\rho \partial^2 u / \partial t^2 = \rho \ddot{u} = - \rho \omega^2 u = M^* \partial^2 u / \partial x^2$$

$\rho$ : La densité du milieu

M: Le module de Young

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 2. Méthode de propagation d'onde:

\* Avant d'aller plus loin, il est souhaitable de se demander pourquoi l'équation pour les matériaux anélastiques:

$$\rho \partial^2 u / \partial t^2 = M^* \partial^2 u / \partial x^2$$

n'est pas strictement valide en tant que généralisation de l'équation de propagation d'onde dans un milieu élastique:

$$\rho \partial^2 u / \partial t^2 = M \partial^2 u / \partial x^2$$

**Il y a deux facteurs qui donnent lieu à des écarts par rapport à la condition supposée de mouvement harmonique:**

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 2. Méthode de propagation d'onde:

a) L'existence d'un amortissement, ce qui signifie que l'amplitude des vibrations diminue avec le temps. Cette situation n'est pas différente de celle d'un système résonnant libre amorti ou l'amortissement est considéré faible.

b) La longueur du paquet d'ondes est considérée comme finie. En fait, le résultat de l'analyse de Fourier d'une impulsion périodique de durée finie peut être représentée comme une distribution de fréquence dont le sommet est plus net lorsque l'impulsion est étendue pour contenir de plus en plus d'ondes. Ainsi, du point de vue de la définition de la fréquence, plus l'impulsion est longue, mieux c'est.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 2. Méthode de propagation d'onde:

\* La solution de l'équation de propagation d'onde s'écrit:

$$u = u_0 \exp(-\mathcal{A}x) \exp\{i\omega[t - (x/v)]\}$$

$v$ : La vitesse de propagation de l'onde.

$\mathcal{A}$ : Atténuation de l'amplitudes d'onde (enveloppe:  $u(x) = u_0 \exp(-\mathcal{A}x)$  ).

Cette atténuation peut être déduite par la comparaison de deux position à savoir  $x_1$  et  $x_2$ :

$$\mathcal{A}(\text{Np Cm}^{-1}) = \ln[u(x_1)/ u(x_2)]/(x_2 - x_1)$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 2. Méthode de propagation d'onde:

$$\mathcal{A}(\text{dB Cm}^{-1}) \equiv 20 \cdot \log_{10}[u(x_1)/u(x_2)]/(x_2 - x_1) = 8,68 \cdot \mathcal{A}(\text{Np Cm}^{-1})$$

$$\mathcal{A}(\text{dB } \mu\text{sec}^{-1}) = 8,68 \cdot 10^{-6} \cdot v(\text{Cm sec}^{-1}) \cdot \mathcal{A}(\text{Np Cm}^{-1})$$

\* Pour  $\phi \ll 1$  et  $M^* = M_1(1 + i\phi)$ :

$$v^2 \approx M_1/\rho$$

$$\mathcal{A} = \phi \cdot \omega / 2v = \pi\phi/\lambda \Rightarrow \lambda = 2\pi v/\omega = v/f$$

$\lambda$ : La longueur d'onde

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## I. Caractérisation du comportement anélastique

### 8. Les fonctions de réponse dynamique supplémentaires:

#### 8. 2. Méthode de propagation d'onde:

\* Du fait que :

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1(\omega)$$



$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\omega)$$



Il y a une « dispersion d'ondes »: Les ondes dont  $\lambda$  (petit) reste derrière



Cette dispersion provoque une distorsion.



Pour minimiser cette distorsion il faut que l'impulsion soit suffisamment longue pour que la distribution de fréquence reste étroite.