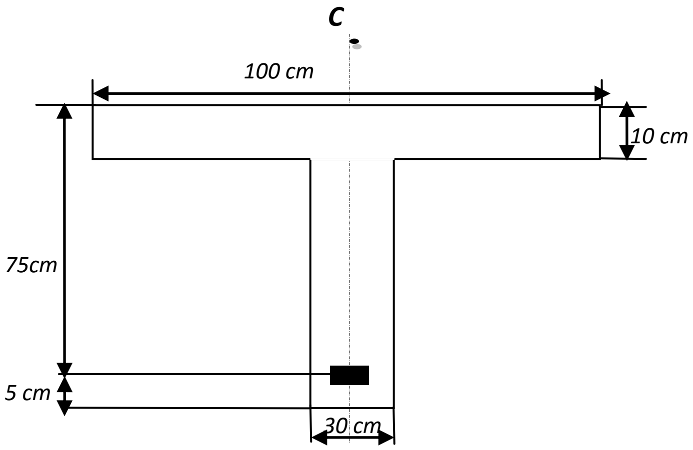
Université Mohamed Khider BISKRA
Faculté des sciences et de la technologie
Département de Génie civil et Hydraulique
3ème année Licence Travaux Publics

Module : BA et BP
Enseignante : Attache Salima
Durée : 01h30

TD N°4 : Flexion Composée (2)

Exercice N°1

Soit une section en double Te représentée sur la figure ci dessous , *soumise à l'E.L.U à un effort normal de compression N=1000 kN appliqué à 25 cm au dessus de la table. Les armatures sont en acier FeE 40 ,* $\sigma_s = 348MPa$ $\sigma_b = 14.2MPa$. *Déterminer les armatures de cette section.*



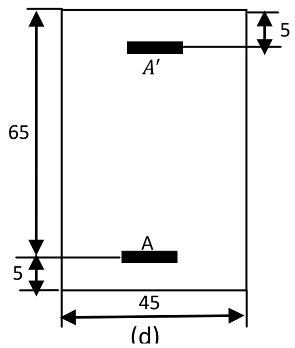
Exercice N°2

Soit une section rectangulaire représentée sur la figure **(d)**, *soumise à l'E.L.U à un effort normal de compression rapportés au centre de gravité G de la section du béton seul.*

- *N=5000 kN et un moment de flexion M=100kNm,*
- *N=4000 kN et un moment de flexion M=200kNm*

Les armatures sont en acier FeE 40 , $\sigma_s = 348MPa$ $\sigma_b = 14.2MPa$.

- *Déterminer les armatures de cette section.*



Exercice N°3

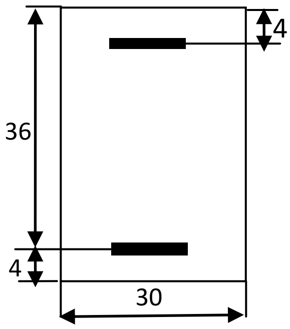
Soit une section rectangulaire représentée sur la figure ci-dessous, soumise aux efforts suivants rapportés au centre de gravité G de la section du béton seul :

- *à l'E.L.U de résistance :un effort normal de compression* N_u*=150 kN et un moment de flexion* M_u*=140 kNm,*

- *à l'ELS : un effort normal de compression* N_{ser}*=107 kN*
  et un moment M_{ser}*=100 kNm,*

Les armatures sont en acier FeE 400 $\gamma_s = 1.15$ *, la fissuration est peu nuisible.*
Pour le béton, on a $f_{c28} = 25MPa$, $\sigma_{bc} = 14.2\ MPa$

- Déterminer les armatures de cette section.



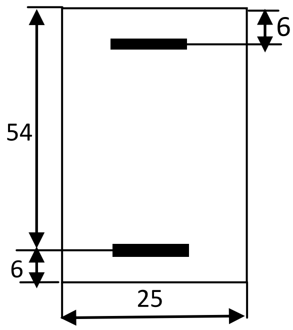
Exercice N°4

Soit une section rectangulaire représentée sur la figure ci-dessous, soumise aux efforts suivants rapportés au centre de gravité G de la section du béton seul :

- *à l'E.L.U de résistance : un effort normal de traction* N_u*=210 kN*
  et un moment de flexion M_u*=161 kNm,*
- *à l'ELS : un effort normal de traction* N_{ser}*=150 kN*
  et un moment M_{ser}*=115kNm.*

Les armatures sont en acier FeE 400, la fissuration est préjudiciable.
Pour le béton, on a $f_{c28} = 25MPa$*,* $\sigma_{bc} = 14.2\ MPa$

- Déterminer les armatures de cette section.



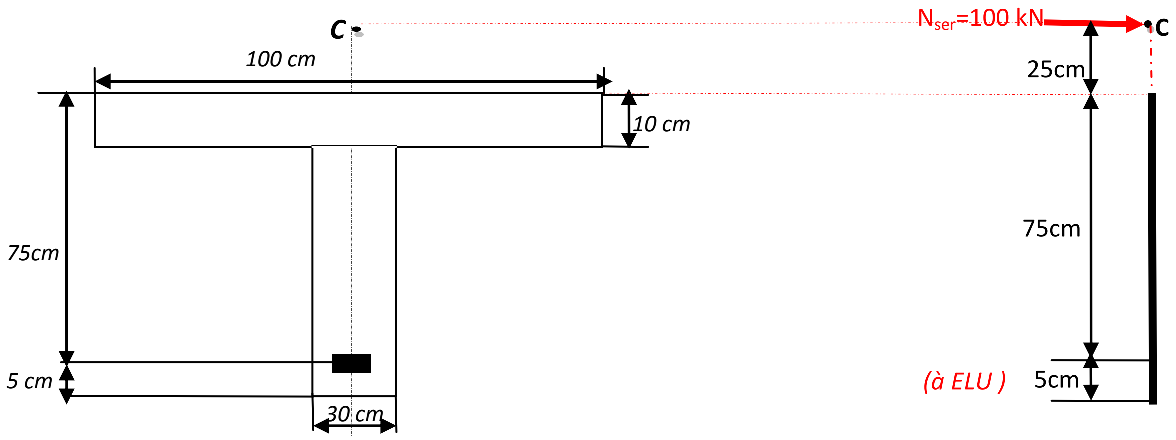
Solutions

Solution Exercice N°1

Le centre de pression se trouve en dehors de la zone limitée par les armatures. donc la section est partiellement comprimée. La méthode de calcul se fait par assimilation à la flexion simple.

Nous avons, par rapport au centre de gravité des armatures tendues :

$$M_1 = 1000(0.25 + 0.75) = 1000\ kNm$$



Moment équilibré par la table *:*

$$M_t = bh_0\sigma_b\left(d - \frac{h_0}{2}\right) = 14.2 \times 100 \times 10\left(75 - \frac{10}{2}\right) = 994000Nm < M_1$$

Donc une partie de la nervure est comprimée et nous appliquerons les formules du ***chapitre flexion simple***. Les étapes du calcul en flexion simple sont les suivantes :

1. calcul de la part de moment repris par les débords de la table :
$$M_{udébord} = (b - b_0)h_0\sigma_{bu}\left(d - \frac{h_0}{2}\right) = 695800Nm$$
2. calcul de la part de moment que doit reprendre l'âme :$M_{u\,âme} = M_1 - M_{udébord}$
$$M_{u\,âme} = 1000 - 695.800 = 304200 \text{ Nm}$$
3. calcul classique de la section d'acier a prévoir pour reprendre $M_{âme}$(calcul du moment ultime réduit μ_u de α_u et de σ_{st})

$$\mu_u = \frac{M_{âme}}{b.d^2.\sigma_{bc}} = 0.127 < \mu_l = 0.392 \quad \Rightarrow A_1' = 0$$

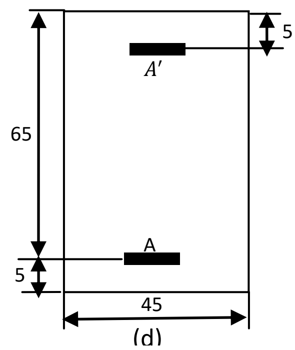
Pour $\mu_u = 0.127$ on a $\beta = 0.931$

4. calcul de la section d'acier à mettre en place $A_s = A_{âme} + A_{débord}$
$$A_f = \frac{M_{udébord}}{\sigma_{st}(d - \frac{h_0}{2})} + \frac{M_{uâme}}{\sigma_{st}.d(1-0{,}4\alpha_u)} = \quad 41.07\ cm^2$$

Nous aurons donc pour les armatures de la section étudiée :

$$A = A_f - \frac{N}{100\sigma_s} = \quad 12.34 \text{ cm}^2 \qquad A' = 0$$

Solution Exercice N°2 :



a) Un effort normal de compression N=5000 kN et M= 100 kN

Nous avons $e = \frac{M_0}{N} = \frac{100}{5000} = 0.02\text{m} = 2\text{cm}$

Le centre de pression se trouve entre les armatures et l'effort N étant un effort de compression, donc il faut vérifier si la section est partiellement comprimée.

Nous avons, par rapport au centre de gravité des armatures tendues :

$$M_1 = M_0 + \left(\frac{h}{2} - c\right)N = 1600\ kNm$$

$(0.337 - 0.81\frac{c'}{h})\ b.h^2\ \bar{\sigma}_b = \quad 776.9104 kNm$

$N(d - c') - M_1 = 1400 \text{kNm}$

Comme $N(d - c') - M_1 > (0.337 - 0.81\frac{c'}{h})\, b.h^2\, \bar{\sigma}_b \;\Rightarrow$ la section est entièrement comprimée.
$(0.5h - c')b.h\,\sigma_{bc} = 1192.8$ kNm

Nous avons : $N(d - c') - M_1 > (0.5h - c')b.h\,\sigma_{bc}$

Nous aurons donc pour les armatures de la section étudiée :

$$A'_1 = \frac{M_1 - (d - 0.5h)b.h\,\sigma_{bc}}{(d - c')\sigma_2} = 19.50\ cm^2 \qquad A'_2 = \frac{N_u - 100b.h\,\sigma_{bc}}{100\sigma_2} - A'_1 = 9.90 cm^2$$

b) Reprenons la même section mais soumise cette fois à un effort normal de compression N=4000 kN et M= 200 kN

$$M_1 = M_0 + \left(\frac{h}{2} - c\right) N = 1400\ kNm$$

$(0.337 - 0.81\frac{c'}{h})\, b.h^2\, \bar{\sigma}_b = \; 776.9104 kNm$
$N(d - c') - M_1 = 1000$ kNm

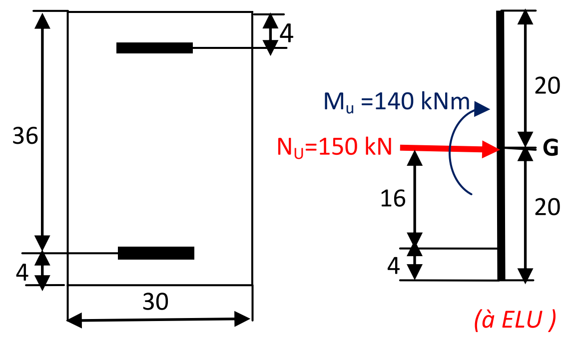
Comme $N(d - c') - M_1 > (0.337 - 0.81\frac{c'}{h})\, b.h^2\, \bar{\sigma}_b \;\Rightarrow$ la section est entièrement comprimée.
$(0.5h - c')b.h\,\sigma_{bc} = 1192.8$ kNm

Nous avons : $N(d - c') - M_1 < (0.5h - c')b.h\,\sigma_{bc}$

La section des armatures seront obtenues par les formules suivantes :

$$\psi = \frac{0.357 + \frac{N(d - c') - 100M_1}{100b.h^2\,\sigma_{bc}}}{0.8571 - \frac{c'}{h}} = 0.912 \qquad \varepsilon_s^1 = 2 + \left(3.437 - 8.019\frac{c'}{h}\right)\sqrt{1 - \psi} > \text{ d'ou } \sigma_s^1 = 348\text{MPa}$$

$$A'_2 = 0 \quad ; \; A'_1 = \frac{N_u - 100\psi.b.h\,\sigma_{bc}}{100\sigma_s^1} = 10.74 cm^2$$



Solution Exercice N°3

1) Etat limite ultime de résistance

Nous avons $e = \frac{M_o}{N} = \frac{140}{150} = 0.93\text{m} = 93\text{cm}$

Le centre de pression se trouve en dehors de la zone limitée par les armatures, donc la section est partiellement comprimée.
Nous avons, par rapport au centre de gravité des armatures tendues :

$$M_1 = M_0 + \left(\frac{h}{2} - c\right) N = 164\ kNm$$

D'où

$$\mu_u = \frac{M_1}{b.d^2.\sigma_{bc}} = 0.297 < \mu_l = 0.392 \quad \Rightarrow A'_f = 0$$

Pour $\mu_u = 0.297$ on a $\beta = 0.818$ et $1000\varepsilon_s = 4.21$

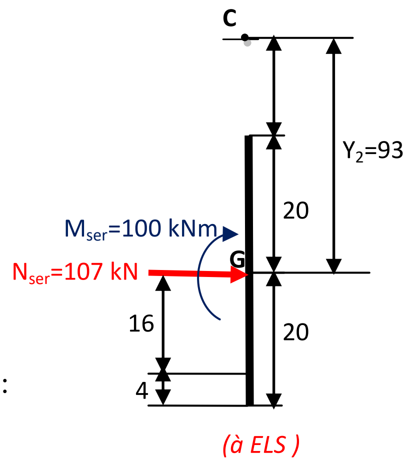
$donc$ $\sigma_s = 348MPa$

Nous obtenons alors : $A_f = \frac{M_1}{\beta d.\sigma_{st}} = 16.01$ cm^2

Nous aurons donc pour les armatures de la section étudiée : (N est un effort de compression)

$A = A_f - \frac{N}{100\sigma_s} =$ 11.70 cm^2 soit $2\emptyset 25 + 1\emptyset 16 = 11.83\ cm^2$

$A' = A'_f = 0$



2) *Etat limite de service*

Nous avons $e = \frac{M_{ser}}{N_{ser}} = \frac{100}{107} = 0.93\text{m} = 93\text{cm}$

Le centre de pression se trouve en dehors de la zone limitée par les armatures, donc la section est partiellement comprimée.

Comme la fissuration est peu nuisible, il nous suffit de vérifier que :

$$\boldsymbol{\sigma_b \le 0.6 f_{c28} = 15\ MPa}$$

- **Première méthode** :

D'après les figures ci-dessus, on a $y_1 = y_2 + c \Rightarrow cy_1 = y_1 - y_2 = -73\ cm < 0$

y_2 sera obtenu par résolution de l'équation suivante : $y_2^3 + py_2 + q = 0$

Avec :

$A' = 0$; $A = 11.83\ cm^2$ $b = 30\ cm$; $d = 36\ cm$; C= -73 cm

$p = -3c^2 - \frac{90A'}{b}(c - c') + \frac{90A}{b}(d - c)$ =-12118

$$q = -2c^3 - \frac{90A'}{b}(c - c')^2 - \frac{90A}{b}(d - c)^2 = 356377$$

$y_2^3 - 12118y_2 + 356377 = 0$ d'où par résolution de l'équation :

$y_2 = 90.43$ $y_1 = 90.43 - 73 = 17.43$

$$S = \frac{by_1^2}{2} + 15(A'(y_1 - c') - A(d - y_1)) = 1261.8$$

$K = \frac{N}{S} = 0.848$

$\sigma_b = Ky_1 = 14.8\, MPa \quad < 15\, MPa \quad (C\, V)$

Donc les armatures déterminées pour l'état limite ultime de résistance conviennent.

- **Deuxième méthode**

Nous allons déterminer la valeurs des armatures lorsque la contrainte sur l'arête la plus comprimée est égale à 15 MPa et nous comparons ensuite les résultats trouvés à ceux obtenus en état limite ultime de résistance.

Nous avons, par rapport au centre de gravité des armatures tendues :

$M_1 = M_0 + \left(\frac{h}{2} - c\right) N = 1117.12\, kNm$ et $\overline{\sigma_b} = 15 MPa$

$\mu'_1 = \frac{M_1}{b.d^2.\overline{\sigma_b}}$ =0.2008

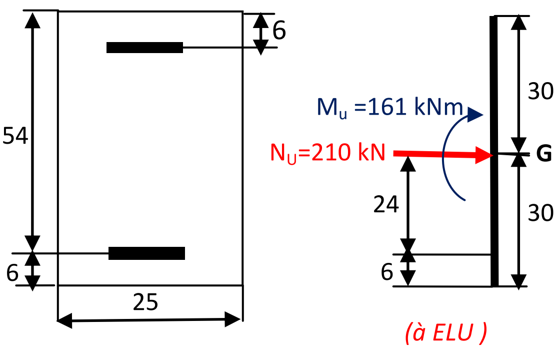
Pour $\mu'_1 = 0.2008$, nous obtenons sur le tableau 7 (annexes BAEL 83)

$\rho_1 = 1.455 \quad et \quad k_1 = 16.43$ d'où $A_f = \frac{\rho_1 bd}{100} = 15.71\, cm^2$ et $\sigma_s = k_1 \sigma_b = 246.4\, MPa$

La section des armatures seront obtenues par : $A_{ser} = A_f - \frac{N}{100\sigma_s} = 11.39\, cm^2 < A_u = 11.83\, cm^2$

Donc la section des armatures $2\emptyset 25 + 1\emptyset 16 = 11.83\, cm^2$ conviennent.

Solution Exercice N°8



1) Etat limite ultime de résistance

Nous avons $e = \frac{M_0}{N} = \frac{161}{210} = 0.77\text{m} = 77\text{cm}$

Le centre de pression ***C*** se trouve en dehors de la zone limitée par les armatures, donc la section est partiellement comprimée.

Nous avons, par rapport au centre de gravité des armatures tendues :

$$M_1 = M_0 + \left(\frac{h}{2} - c\right) N = 110.6\, kNm$$

D'où

$$\mu_u = \frac{M_1}{b.\,d^2.\,\sigma_{bc}} = 0.107 < \mu_l = 0.392 \quad \Rightarrow A'_f = 0$$

Pour $\mu_u = 0.107$ on a $\beta = 0.943 \quad et \quad 1000\varepsilon_s = 10$

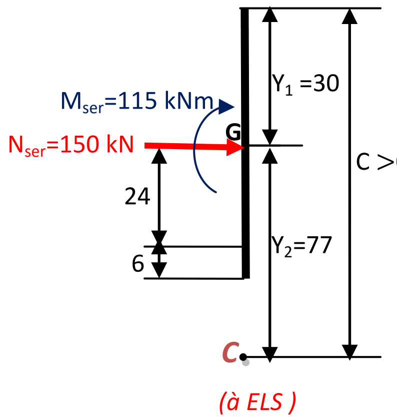
$donc \quad \sigma_s = 348 MPa$

Nous obtenons alors : $A_f = \frac{M_1}{\beta d.\sigma_{st}} = 6.24\ \text{cm}^2$

Nous aurons donc pour les armatures de la section étudiée : (N est un effort de traction)

$$A = A_f + \frac{N}{100\sigma_s} = \ 12.27\ \text{cm}^2 \qquad \text{soit} \qquad 4\emptyset 20 = 12.56\ cm^2$$

$$A' = A'_f = 0$$



2) ***Etat limite de service***

Nous avons $\quad e = \frac{M_{ser}}{N_{ser}} = \frac{115}{150} = 0.77\text{m} = 77\text{cm}$

Le centre de pression se trouve en dehors de la zone limitée par les armatures, donc la section est partiellement comprimée.

Le centre de pression ***C*** est situé au dessous de centre de gravité ***G***

D'après la figure ci-dessus, on a $\quad y_1 = y_2 + C \ \Rightarrow C = y_1 + y_2 = 107\ cm\ >\ 0$

y_2 sera obtenu par résolution de l'équation suivante : $\quad y_2^3 + py_2 + q = 0$

Avec :

$A' = 0 \quad ; \quad A = 12.56\ cm^2 \quad b = 25\ cm\ ; \quad d = 54cm\,;$ C= 107 cm

$$p = -3c^2 - \frac{90A'}{b}(c - c') + \frac{90A}{b}(d - c) = -36743$$

$$q = -2c^3 - \frac{90A'}{b}(c - c')^2 - \frac{90A}{b}(d - c)^2 = -2577098$$

$y_2^3 - 36743y_2 - 2577098 = 0 \quad$ d'où par résolution de l'équation nous donne :

$y_2 = -89.94\ cm \qquad y_1 = -89.94 + 107 = 17.06\ cm$

$$S = \frac{by_1^2}{2} + 15(\,A'(y_1 - c') - A(d - y_1)) = -3321$$

$K = \frac{N}{S} = 0.452 \qquad$ avec $\ N = -150\ kN \quad$ (N négatif en cas de traction)

Comme la fissuration est préjudiciable , nous devons vérifier que :

$\sigma_b = Ky_1 < \overline{\sigma_b} = 0.6f_{c28} \qquad \Rightarrow \quad \sigma_b = 7.7\ MPa < \overline{\sigma_b} = 15\ MPa \quad (\,CV\,)$

Et

$\sigma_s = 15K(d - y_1) < \overline{\sigma_s} = \min\left(\frac{2}{3}\,f_e\ ,110\sqrt{\eta.f_{t28}}\ \right) \Rightarrow \sigma_s = 250\ MPa\ > \overline{\sigma_s} = 240\ MPa \quad (\,C\ N\ V\,)$

Donc, nous allons déterminer la section des armatures lorsque la contrainte sur l'arête la plus tendue est égale à $\overline{\sigma_s} = 240\ MPa.$

Nous avons $\ M_1 = M_0 - \left(\frac{h}{2} - c\right)N = 79\ kNm$

$$\mu_1 = \frac{M_1}{b.d^2.\overline{\sigma_s}} = 0.00452$$

Pour $\ \mu_1 = 0.00452,\ $ nous obtenons sur le tableau 7 (annexes BAEL 83)

$\beta_1 = 0.893 \quad et \quad k_1 = 31.73$ d'où $A_f = \frac{M_1}{\beta_1 d \sigma_s} = 6.83\ cm^2$

et $\sigma_b = \frac{\sigma_s}{k_1} = 7.6\ MPa < \overline{\sigma_b} = 15\ MPa$

La section des armatures seront obtenues par : $A_{ser} = A_f + \frac{N}{100\sigma_s} = 13.08\ cm^2 \ > \ A_u = 12.27\ cm^2$

Donc nous retiendrons la section des armatures suivante $3\emptyset 20 + 2\emptyset 16 = 13.44\ cm^2$.