1

حساب التكامل $\frac{I}{2}$ من السلسلة رقم 2

$$\frac{I}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1-x^2}} \; ; \; \begin{cases} \text{posons} : x = \sin(t) ; 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \text{puis} : y = \tan\left(\frac{t}{2}\right). \end{cases}$$

الخطوة الأولى

نحول التكامل من تكامل بدلالة x إلى تكامل بدلالة t.

لدينا في معطيات التمرين $x = \sin(t)$ إذن: $dx = \cos(t)dt$

نجد أن:

$$\frac{I}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\, dt}{(2+\sin(t))\sqrt{1-\sin^2(t)}}$$

وذلك بتعويض x بما يساويها و dx بما يساويها

حدود التكامل أيضا تتغير لأن التكامل بدلالة t هنا t بين 0 و $\frac{\pi}{2}$

$$\frac{I}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\, dt}{(2+\sin(t))\cancel{\cos(t)}}$$

لأن:

$$1 - \sin^2(t) = \cos^2(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)|$$

إذن:

$$\sqrt{1-\sin^2(t)} = |\cos(t)|$$

نعلم أن: $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], |\cos(t)| = \cos(t)$

إذن:

$$\sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)$$

إذن: $\frac{I}{2} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(2 + \sin(t))}$

الخطوة الثانية

نقوم بحساب تكامل دالة مثلثية

لدينا: $\frac{I}{2} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(2 + \sin(t))}$ (*)

حسب معطيات التمرين لدينا: $y = \tan(\frac{t}{2})$

إذن: لحساب $\frac{I}{2}$ نقوم بتحويل التكامل من تكامل بدلالة t إلى تكامل بدلالة y.

نعلم أنه من أجل $y = \tan(\frac{t}{2})$ نجد:

$$\left.\begin{aligned} \sin(t) &= \frac{2y}{1+y^2} \\ \cos(t) &= \frac{1-y^2}{1+y^2} \\ dt &= \frac{2\,dy}{1+y^2} \end{aligned}\right\}$$

ما يهمنا هنا هو:

$$\left.\begin{aligned} \sin(t) &= \frac{2y}{1+y^2} \quad \text{و} \\ dt &= \frac{2\,dy}{1+y^2} \end{aligned}\right\}$$

عند التعويض في (*) وبعد التبسيط نجد:

$$\frac{I}{2} = \int_{\tan(0)}^{\tan(\frac{\pi}{4})} \frac{dy}{y^2 + y + 1}$$

لا ننسى تغيير حدود التكامل أيضا.

3/

$$\frac{I}{2}=\int_{0}^{1}\frac{dy}{y^2+y+1}$$

لأن:

$\cdot\ t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow y=\tan\left(\frac{t}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

$\cdot\ t=0\Rightarrow y=\tan(0)=0$

حسب التمرين الأخير من السلسلة -1- للتكامل رقم 5. وجدنا أن:

$$J=\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

بما أن $\frac{I}{2}$ تكامل محدود إذن يكفي فقط التعويض بحدود التكامل إذن:

$$\frac{I}{2}=\int_0^1\frac{dy}{y^2+y+1}=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$\frac{I}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3})-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$