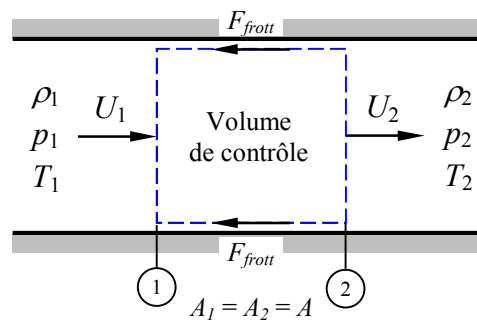


Chapitre 4 : Écoulement Non Isentropique 1D en Conduit à Section Constante

I. ECOULEMENT ADIABATIQUE AVEC FROTTEMENT : ECOULEMENT DE FANNO

I.1. Analyse de l'écoulement de Fanno et équations de base

On considère un écoulement stationnaire, unidimensionnel et adiabatique d'un gaz parfait de capacités calorifiques constantes à travers une conduite de section constante avec des effets de frottement significatifs; tels écoulements sont appelés écoulements de Fanno (Fig.1).



En notant que $A_1 = A_2 = A$, la conservation de masse se réduit à:

$$\rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 \quad \text{ou} \quad \rho U = C^{\text{ste}} \quad (1)$$

En supposant qu'il n'y a pas de forces volumiques et seule la force de frottement avec la surface interne de la conduite F_{frott} est exercée sur le fluide, la conservation de la Qt. de Mvt. suivant x s'écrit:

$$p_1 A - p_2 A - F_{frott} = Q_m (U_2 - U_1) \quad (2)$$

Comme le volume de contrôle n'implique pas d'interactions dues à la chaleur ou au travail, et la variation d'énergie potentielle est négligeable, la conservation d'énergie devient ainsi:

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2} = h_2 + \frac{U_2^2}{2} = h_0 = C^{\text{ste}}$$

ou encore pour un gaz parfait de capacités calorifiques constantes:

$$T_1 + \frac{U_1^2}{2c_p} = T_2 + \frac{U_2^2}{2c_p} = T_0 = C^{\text{ste}} \quad \text{ou} \quad T + \frac{U^2}{2c_p} = C^{\text{ste}} \quad (3)$$

Pour un écoulement adiabatique, la variation (augmentation) d'entropie peut être causée seulement par des irréversibilités telles que le frottement. Cette variation pour un gaz parfait de capacités calorifiques constantes s'exprime par:

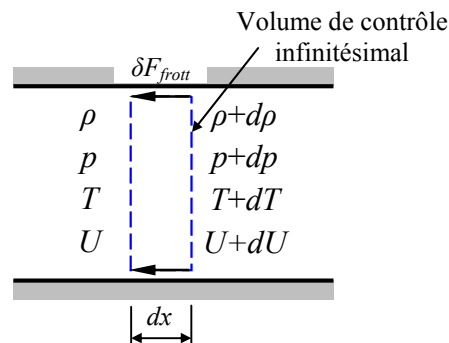
$$s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) > 0 \quad (4)$$

Avec la relation reliant les propriétés p , T et ρ d'un gaz parfait dans les états (1) et (2):

$$R = \frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{\rho T} = C^{\text{ste}} \quad (5)$$

I.2. Variation des caractéristiques d'écoulement en fonction du nombre de Mach

Etant donné que la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse, et cette dernière varie significativement le long d'un écoulement compressible, il est donc nécessaire d'effectuer une analyse différentielle pour prendre en compte correctement la variation de la force de frottement.



La différentiation de l'équation de continuité (1) donne:

$$\rho dU + U d\rho = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dU}{U} \quad (6)$$

L'équation de conservation de la Qt. de Mvt. (2) se réécrit comme suit:

$$pA - (p + dp)A - \delta F_{\text{frott}} = Q_m (U + dU) - Q_m U$$

ou encore:

$$dp + \frac{\delta F_{frott}}{A} + \rho U dU = 0$$

La force de frottement est reliée à la contrainte de cisaillement τ_p et au facteur de frottement local (de Darcy) f par:

$$\frac{\delta F_{frott}}{A} = \frac{\tau_p dA_p}{A} = \tau_p \frac{P}{A} dx = \frac{f}{8} \rho U^2 \times \frac{4}{D_h} \times dx = \frac{f}{2D_h} \rho U^2 dx$$

En substituant cette relation dans l'équation précédente et en divisant par ρU^2 , on aura:

$$\frac{dp}{\rho U^2} + \frac{f}{2D_h} dx + \frac{dU}{U} = 0$$

et comme $\rho U^2 = \gamma \rho R T M a^2 = \gamma \rho M a^2$, cette équation se réécrit:

$$\frac{1}{\gamma M a^2} \frac{dp}{p} = -\frac{f}{2D_h} dx - \frac{dU}{U} \quad (7)$$

La différentiation de l'équation d'énergie (3) donne:

$$\frac{dT}{T} + \frac{U^2}{c_p T} \frac{dU}{U} = 0$$

Avec $U^2/c_p T = \gamma R T M a^2 / \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T = (\gamma - 1) M a^2$, cette équation se réécrit:

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) M a^2 \frac{dU}{U} \quad (8)$$

La différentiation de l'équation d'état (5) conduit à:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \quad (9)$$

A partir de la définition du nombre de Mach $M a^2 = U^2/\gamma R T$, on tire l'équation suivante:

$$2 \frac{dM a^2}{M a^2} = 2 \frac{dU}{U} - \frac{dT}{T} \quad \text{ou bien} \quad \frac{dM a^2}{M a^2} = \frac{dU}{U} - \frac{dT}{T} \quad (10)$$

Les cinq équations précédentes (6)-(10), nous permettent d'exprimer la variation des propriétés de l'écoulement le long de la conduite en fonction du nombre de Mach et du facteur de frottement, telles que:

$$\frac{dp}{p} = -\gamma M a^2 \frac{1 + (\gamma - 1) M a^2}{2(1 - M a^2)} \frac{f}{D_h} dx \quad (11)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\gamma Ma^2}{2(1-Ma^2)} \frac{f}{D_h} dx \quad (12)$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\gamma(\gamma-1)Ma^4}{2(1-Ma^2)} \frac{f}{D_h} dx \quad (13)$$

$$\frac{dU}{U} = \frac{\gamma Ma^2}{2(1-Ma^2)} \frac{f}{D_h} dx \quad (14)$$

$$\frac{dMa^2}{Ma^2} = \gamma Ma^2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2}{(1-Ma^2)} \frac{f}{D_h} dx \quad (15)$$

A partir du second loi de la thermodynamique, la variation d'entropie due au frottement peut s'exprimer par:

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \frac{f}{D_h} dx \quad (16)$$

Les relations (11)-(16) montrent que la variations des caractéristiques de l'écoulement dépend de son régime (subsonique ou supersonique) sauf l'entropie qui doit toujours augmenter pour une évolution irréversible (frottement), comme il est indiqué dans le tableau suivant:

Régime d'écoulement	dMa	dV	Dp	$D\rho$	dT	ds
Subsonique $Ma < 1$	+	+	-	-	-	+
Supersonique $Ma > 1$	-	-	+	+	+	+

Rq.: à partir du tableau précédent, on constate que quelque soit le régime d'écoulement en amont (subsonique ou supersonique), les caractéristiques de l'écoulement tendent toujours vers l'état critique ($Ma = 1$) qui correspond au point d'entropie maximale dans le diagramme $T-s$ (Figure).

A partir de (15) nous avons:

$$\frac{f}{D_h} dx = \frac{2(1-Ma^2)}{\gamma Ma^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)} \frac{dMa}{Ma} \quad (17)$$

Maintenant si on élimine $\frac{f}{D_h} dx$ des équations (11)-(14) et (16), nous obtenons:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1 + (\gamma-1)Ma^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2} \frac{dMa}{Ma} \quad (18)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2} \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} \quad (19)$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(\gamma-1)\text{Ma}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2} \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} \quad (20)$$

$$\frac{dU}{U} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2} \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} \quad (21)$$

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma}(1 - \text{Ma}^2)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2} \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} \quad (22)$$

L'intégration des équations (17)-(22) d'un état initial quelconque ($x = 0, p, \rho, T, \text{Ma}$) à l'état critique ($x = L^*, p^*, \rho^*, T^*, \text{Ma} = 1$), donne:

$$\frac{\bar{f}L^*}{D_h} = \frac{1 - \text{Ma}^2}{\gamma \text{Ma}^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma + 1)\text{Ma}^2}{2 + (\gamma - 1)\text{Ma}^2} \right) \quad (20)$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{\text{Ma}} \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2} \right)^{1/2} \quad (21)$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{\text{Ma}} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right)^{1/2} \quad (22)$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2} \quad (23)$$

$$\frac{U}{U^*} = \text{Ma} \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2} \right)^{1/2} \quad (24)$$

$$\frac{s - s^*}{c_p} = \ln \left(\text{Ma}^2 \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2}}{\text{Ma}^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2 \right)} \right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \right) \quad (25)$$

