الفصل الرابع

الإحتـــمالات

1.4 الحساب التوفيقي

يعتبر المبدأ الأساسي للعد أمرا بالغ الأهمية في عناصر نظرية الاحتمالات التي سوف نتطرق إليها في هذا الفصل، والذي ينص على أنه إذا كانت النتائج الممكنة لتجربة ما هي n والنتائج الممكنة لتجربة أخرى هي m فإن النتائج الممكنة للتجربتين معا هي: $n \cdot m$.

.1.1.4 التباديل Permutations

تعريف 1.1.4 : نسمي ترتيب n من العناصر المختلفة بأنه تبديلة هذه العناصر مأخوذة k في كل مرة، بشرط أن تؤخذ جميع العناصر أي $n = k$. هي عدد المجموعات التي يمكن تشكيلها من هذه العناصر التي تختلف باختلاف ترتيب أحد هذه العناصر على الأقل. ويعبر عنها بالعلاقة التالية :

$$P_n = n!$$

يقرأ n عاملي.

نظراً لأنه يجب استخدام جميع عناصر المجموعة ، فإن التجربة العشوائية تكون دائماً بدون إرجاع.

مثال 1 : ما هو عدد الطرق الممكنة لترتيب مجموعة الحروف (a, b, c) ؟

من خلال العد المباشر نحصل على 6 طرق (a, b, c)، (a, c, b)، (b, a, c)، (b, c, a)، (c, a, b)، (c, b, a). كل

واحدة من هذه الترتيبات يعرف بالتبديلة. حيث أنه هناك 6 تبديلات ممكنة من مجموعة من 3 عناصر مختلفة.
ويمكن الحصول على هذه النتيجة أيضا من قاعدة المبدأ الأساسي للعد. حيث يتم اختيار الحرف الأول بثلاث طرق و يبقى لنا حرفين للاختيار الحرف الثاني، وحرف واحد لاختيار الحرف الثالث.
يمكن التعبير عن ذلك

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

مثال 2 : نسحب أربع كرات من كيس يحتوي على كرة حمراء (R) ، كرة زرقاء (B) ، كرة صفراء (J) و كرة خضراء (V). النتائج المحتملة هي:

$$(R,B,J,V),(R,B,V,J),(R,J,B,V),(R,J,V,B),(R,V,B,J),(R,V,J,B),$$
$$(B,R,J,V),(B,R,V,J),(B,J,R,V),(B,J,V,R),(B,V,R,J),(B,V,J,R),$$
$$(J,R,B,V),(J,R,V,B),(J,B,R,V),(J,B,V,R),(J,V,R,B),(J,V,B,R),$$
$$(V,R,B,J),(V,R,J,B),(V,B,R,J),(V,B,J,R),(V,J,R,B),(V,J,B,R).$$

لذلك هناك 24 تبديلة محتملة لهذه المجموعة.
لتبسيط حساب التباديل المحتملة ، يكفي ضرب عدد العناصر الممكنة لكل فرعة. في هذه الحالة سوف يكون الحساب كالآتي

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24.$$

2.1.4. الترتيبة Arrangement

تعريف 2.1.4 : الترتيبة هي ترتيب مجموعة جزئية لعدد من عناصر مجموعة ما.

يتميز ترتيبان من نفس المجموعة بمرتبة ترتيب عناصرها.
على سبيل المثال، إذا كان لدينا مجموعة تحتوي على الحروف (A,B,C) ، فإننا نجد الترتيبات التالية (A,B) و (B,A) بين جميع الترتيبات الممكنة للمجموعة.
يختلف حساب عدد الترتيبات الممكنة اعتماداً على ما إذا كانت تجربة بإرجاع أم لا.

في حالة تجربة بدون إرجاع، يتم حساب عدد الترتيبات الممكنة باستخدام الصيغة التالية:

$$A_n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

حيث يمثل n عدد العناصر في المجموعة ويمثل k عدد عناصر المجموعة التي تم إختيارها كمجموعة جزئية.

مثال 3 : نقوم باختيار حرفين عشوائياً من المجموعة (D, E, F, G)، إذا تم إجراء التجربة العشوائية دون إرجاع، فهناك 4 عناصر ممكنة للسحب الأول و 3 عناصر ممكن للسحب الثاني.الترتيبات الممكنة لذلك هم كالتالي:

$$(D, E), (D, F), (D, G),$$
$$(E, D), (E, F), (E, G),$$
$$(F, D), (F, E), (F, G),$$
$$(G, D), (G, E), (G, F).$$

لذلك هناك ما مجموعه 12 نتيجة محتملة.
يمكننا تبسيط تعداد النتائج المحتملة بواسطة ضرب عدد العناصر الممكنة لكل حالة:

$$4 \cdot 3 = \text{12 ترتيبة ممكنة}$$

باستخدام الصيغة أعلاه

$$A_n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

حيث $n = 4$ و $k = 2$ ، فإننا نقوم بالحساب التالي:

$$A_4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = \text{12 ترتيبة ممكنة}.$$

في حالة السحب بإرجاع، يتم حساب عدد الترتيبات الممكنة باستخدام الصيغة التالية:

$$\text{عدد الترتيبات الممكنة} = n^k$$

حيث يمثل n عدد العناصر في المجموعة ويمثل k عدد العناصر للمجموعة الجزئية المختارة.

مثال 4 : نقوم باختيار حرفين عشوائياً من المجموعة (D, E, F, G). إذا تم السحب عشوائيا مع الإرجاع، فهناك 4 عناصر محتملة للسحب الأول و 4 عناصر محتملة للسحب الثاني. الترتيبات الممكنة هي كما يلي:

$$(D, D), (D, E), (D, F), (D, G),$$
$$(E, D), (E, E), (E, F), (E, G),$$
$$(F, D), (F, E), (F, F), (F, G),$$
$$(G, D), (G, E), (G, F), (G, G).$$

لذلك هناك ما مجموعه 16 نتيجة محتملة.
يمكننا تبسيط حساب النتائج المحتملة بضرب عدد العناصر الممكنة لكل سحب:

$$A_4 = 4 \cdot 4 = \text{ترتيبة ممكنة } 16.$$

باتباع الصيغة أعلاه حيث $n = 4$ و $k = 2$ ، نجد:

$$n^k = 4^2 = \text{ترتيبة الممكنة } 16$$

3.1.4. التوفيقات Combinaisons

تعريف 3.1.4 : توفيقة مجموعة من العناصر هو ترتيب غير منظم لعدد من عناصر تلك المجموعة.

توفيقة مجموعة ما تتوافق مع مجموعة جزئية من العناصر غير المرتبة في المجموعة. يتم تحديد عدد المجموعات المحتملة لتجربة عشوائية دون إرجاع على النحو التالي:

$$\text{عدد المجموعات الممكنة} = \frac{\text{عدد الترتيبات الممكنة}}{\text{عدد التباديل الممكنة في هذا الترتيب}}$$

و نكتب

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

حيث يمثل n عدد العناصر الممكنة في المجموعة ويمثل k عدد العناصر المحددة في المجموعة المختارة.

مثال 5 : يتم سحب ثلاث كرات بشكل عشوائي من كيس يحتوي على كرة حمراء (R) ، كرة زرقاء (B) ، كرة صفراء (J) و كرة خضراء (V). يتم تحديد عدد المجموعات الممكنة باستخدام الصيغة أعلاه.

$$\text{عدد المجموعات الممكنة} = C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{24}{6} = 4$$

مع الأخذ بعين الاعتبار الترتيب ، هناك 24 ترتيبات ممكنة:

$$(R,B,J),(R,B,V),(R,J,B),(R,J,V),(R,V,B),(R,V,J),$$
$$(B,R,J),(B,R,V),(B,J,R),(B,J,V),(B,V,R),(B,V,J),$$
$$(J,R,B),(J,R,V),(J,B,R),(J,B,V),(J,V,R),(J,V,B),$$
$$(V,R,B),(V,R,J),(V,B,R),(V,B,J),(V,J,R),(V,J,B).$$

باستخدام الألوان ، نجد أن هناك 6 طرق مختلفة لاختيار ثلاثة أحجار ملونة إذا أخذنا في الاعتبار الترتيب. هذا يتوافق مع عدد التباديل المحتملة.

عدد المجموعات المحتملة هو 4، وبالتالي فإن هذه المجموعات هي كما يلي:

$$(R, B, J), (R, B, V), (J, B, V), (J, V, R).$$

يمكن أن نحسب عدد المجموعات باستخدام الصيغة أعلاه حيث $n = 4$ و $k = 3$

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{24}{6} = 4$$

في حالة إجراء تجربة عشوائية مع الإرجاع ، يتم حساب عدد المجموعات المحتملة باستخدام الصيغة التالية:

$$\text{عدد المجموعات الممكنة} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

حيث يمثل n عدد العناصر في المجموعة ويمثل k عدد العناصر المحددة في المجموعة المختارة في السحب.

مثال 6 : يتم سحب ثلاث كرات بشكل عشوائي من جرة تحتوي على كرة حمراء ، واثنين من الكرات الزرقاء المنفصلة وأربع كرات خضراء منفصلة. نريد تحديد عدد التوليفات الممكنة في حالة إجراء سحوبات مع الإرجاع.

هنا ، $n = 7$ و $k = 3$.

باستخدام الصيغة أعلاه ، نقوم بإجراء الحساب التالي:

$$\text{عدد المجموعات الممكنة} = \frac{(7+3-1)!}{3!(7-1)!} = \frac{9}{3!\cdot 6!} = 84 \text{ مجموعة}.$$

2.4 خواص التوفيـقات

1.2.4. التناظـــر

عدد المجموعات ذات k عنصر و المأخوذة من مجموعة ذات n عنصر هو :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

و منه لدينا الخواص التالية:

1 ـ

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

لأن

$$C_n^0 = C_n^n = \frac{n!}{n!} = 1$$

2 ـ من أجل $n \geq 1$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

3 ـ من أجل $n \geq 2$

$$C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

و بالتراجع نجد من أجل $n \geq k$:

$$C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

2.2.4. توفيقات مركبة أو صيغة باسكال

من بين n عنصر، نأخذ عنصرا معينا.

- إذا كان هذا العنصر هو أحد العناصر k المختارة ، فهناك C_{n-1}^{k-1} احتمال لاختيار $k-1$ عنصر آخر من بين $n-1$ عنصر متبقية.

- إذا لم يكن هذا العنصر من بين الإختيارات، من ناحية أخرى ، جزءا من السحب ، فهناك C_{n-1}^{k} احتمال لاختيار العناصر الأخرى من بين الـ $n-1$ العناصر المتبقية.

منها تحصلنا على العلاقة التالية

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k.$$

تنتج شروط مثلث باسكال من التطبيق المباشر لهذه العلاقة.

n							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
	0	1	2	3	4	5	6
				k			

لإنشاء مثلث باسكال ، يكفي حمل القيم المأخوذة من العمود k والقيم المأخوذة من السطر n (انظر الجدول أعلاه). يتم الحصول على القيمة المخصصة لكل مربع أو خانة، وذلك عن طريق جمع قيمة المربع الموجود أعلاه مباشرة، وقيمة المربع الموجود أعلاه إلى اليسار. هذا يتوافق مع تطبيق الخواص المذكورة أعلاه.

ملاحظة 1 : يسمح مثلث باسكال بالحصول على المعاملات العددية أو المعامل ذات الحدين لثنائي نيوتن عن طريق صيغة تراجعية.

3.2.4. صيغة نيوتن ذات الحدين Binôme de Newton

نظرية ذات الحدين أو ما يسمى ثنائي الحد لنيوتن la formule du binôme de Newton **هي صيغة وضعها نيوتن لإيجاد نشر لثنائي الحد مرفوع بقوة صحيحة ما. ويطلق على هذه الصيغة صيغة ثنائي الحد لنيوتن.**

تعريف 1.2.4 : من أجل $n \in \mathbb{N}$ و من أجل كل عدد x و y لدينا:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$$

نسمي C_n^k المعاملات ذات الحدين أو معاملات نيوتن، يمكن الحصول على هذه المعاملات بسهولة باستخدام مثلث باسكال.

مثال 1 : تحليل العدد $(x+y)^3$ يعطينا:

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= \sum_{k=0}^{3} C_3^k x^{3-k} y^k \\ &= C_3^0 x^3 y^0 + C_3^1 x^2 y + C_3^2 x y^2 + C_3^3 x^0 y^3 \\ &= 1x^3y^0 + 3x^2y + 3xy^2 + 1x^0y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.\end{aligned}$$

ملاحظة 2 : بوضع $x = y = 1$ نجد مجموع معاملات نيوتن على الشكل التالي

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

C_n^k يمثل عدد عناصر مجموعة جزئية تحتوي على k عنصر من المجموعة E ذات الـ n عنصر.
ومنه مجموع عناصر المجموعات أجزاء المجموعة ذات n عنصر هو 2^n.

3.4 فضــاء الأحداث الإبتدائية

1.3.4. أنواع الأحداث

تعريف 1.3.4 : الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء النتائج المحتملة لتجربة عشوائية.
نسمى العناصر التي تنتمي إلى هذه المجموعة الجزئية : النتائج (أو الحالات) الموائية لتحقيق الحدث.

خلال تجربة عشوائية ، يمكننا في بعض الأحيان تقديم تنبؤ، يعني تنبؤ يحدث في المستقبل و غير معروف ، لكن لديه فرصة حدوث ذلك. خلال هذا الحدث ، سنكون قادرين على الحصول على نتائج معينة بين جميع النتائج المحتملة.

مثال 1 : إذا قمنا برمي نرد من ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 ، يمكن أن يحدث العديد من الأحداث.
فضاء النتائج المحتملة هو

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

النتائج المحتملة للأحداث	مثال للأحداث
$A = \{5\}$	A : نتحصل على 5
$B = \{1, 3, 5\}$	B : نتحصل على عدد فردي
$C = \{5, 6\}$	C : نتحصل على عدد أكبر من 4
$D = \{2, 3, 5\}$	D : نتحصل على عدد أولي

يمكن أن يتوافق الحدث مع نتيجة واحدة أو نتائج متعددة أو جميع نتائج فضاء الإحتمالات. كما قد لا تتوافق مع أي نتيجة. هناك بالتالي أنواع مختلفة من الأحداث.

2.3.4. الحدث الإبتدائي

تعريف 2.3.4 : يكون الحدث إبتدائي إذا كان يحتوي على نتيجة واحدة فقط من مجموعة أو فضاء الاحتمالات. ونسمى النتيجة التي تشكل الحدث الابتدائي المفردة *Singleton*.

مثال 2 : 1- نقوم بسحب ورقة من مجموعة من 52 ورقة. الحدث *obtenir l'as de coeur* حدثا إبتدائيا لأنه يحتوي على نتيجة واحدة فقط من مجموعة الاحتمالات.
احتمال هذا الحدث هو $1/52$.

2- الحدث (الحصول على الرقم 3) عند رمي النرد هو حدث إبتدائي لأنه يحتوي على نتيجة واحدة فقط من مجموعة الاحتمالات.
احتمال هذا الحدث هو $1/6$.

ملاحظة 1 : مجموع الاحتمالات لجميع الأحداث الأولية للتجربة العشوائية يساوي 1.

3.3.4. أحداث أكيدة، ممكن و مستحيل

يمكننا توضيح بعض الأحداث المحتملة والمستحيلة على خط الاحتمالات. على هذا الخط ، كلما كانت النتيجة موجودة على اليسار ، قل احتمال حدوثها.

أكيدة 100%	ممكنة	مستحيلة 0%

مثال 3 : النتائج المرتبطة بتجربة رمي نرد

نتحصل على رقم زوجي : ممكنة

نتحصل على رقم بين 1 و 6: أكيدة 100%

نتحصل على الرقم 7: مستحيلة 0%

تعريف 3.3.4 : الحدث الأكيد *événement certain* هو الحدث الذي يحدث دائما. وهو يتوافق مع مجموعة النتائج المحتملة.
احتمال حدوث هاذا الحدث هو 1 أو 100%.

مثال 4 : الحدث (الحصول على رقم يتراوح بين 1 و 6) عندما نقوم برمي نرد هو حدث أكيد، لأن الحدث يتوافق مع مجموعة من النتائج المحتملة و احتمال هذا الحدث هو: $1 = 6/6$.

تعريف 4.3.4 : الحدث المحتمل *événement possible* هو الحدث الذي يمكن أن يحدث. نقول أيضا الحدث المحتمل.
يتراوح احتمال حدوث هذا الحدث بين 0 و 1، حيث يتم استبعاد هذين الطرفين.

مثال 5 : الحدث (الحصول على رقم زوجي) عندما نقوم برمي نرد هو حدث محتمل وممكن، لأن الحدث يتوافق مع مجموعة جزئية غير فارغة من فضاء الاحتمالات ($A = \{2, 4, 6\}$).
احتمال حدوث هذا الحدث هو : $3/6 = 1/2$.

تعريف 5.3.4 : الحدث المستحيل *événement impossible* هو حدث اللذي لن يحدث أبداً ، ومن المؤكد أنه لن يحدث.
احتمالية وقوع حدث مستحيل هي دائما 0.

مثال 6 : الحدث (الحصول على رقم 7) عندما نقوم برمي نرد من ستة جوانب حدثا مستحيلا لأن الرقم7 ليس جزءا من مجموعة النتائج المحتملة.
احتمال هذا الحدث هو 0.

4.3.4. أحداث تكميلية Événements complémentaires

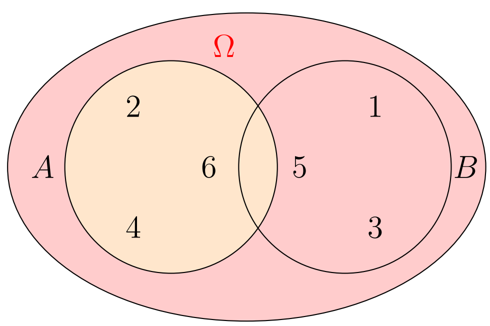
تعريف 6.3.4 : تكون الأحداث (A و B) متكاملة *complémentaires* عندما تكون غير متوافقة وعندما يتوافق مزيج نتائجها مع فضاء النتائج المحتملة.

لكي يكون الحدثان متكاملان ، يجب أن يكون تقاطعهما فارغا ($A \cap B = \phi$) وأن يكون اتحاد مجموعتي نتائجهما مساويا لفضاء النتائج المحتملة ($A \cup B = \Omega$).
يقابل احتمال الحدثين المتكاملين (A و B) مجموع احتمالات كل حدث. هذا المجموع يساوي 1.

$$P(A) + P(B) = 1$$

نرمز للحدث المكمل للحدث A بالرمز $\overline{A}$ أو $\complement A$.

مثال 7 : الحدث A (الحصول على رقم زوجي) والحدث B (الحصول على رقم فردي) عندما نرمي نرد ذوستة جوانب عبارة عن أحداث متكاملة لأن مزيج نتائجها يتوافق مع مجموعة كل النتائج المحتملة.

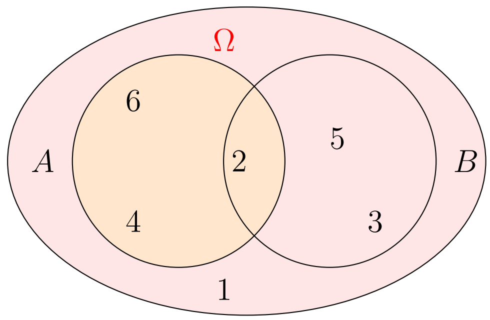


5.3.4. أحداث متنافية و غير متنافية

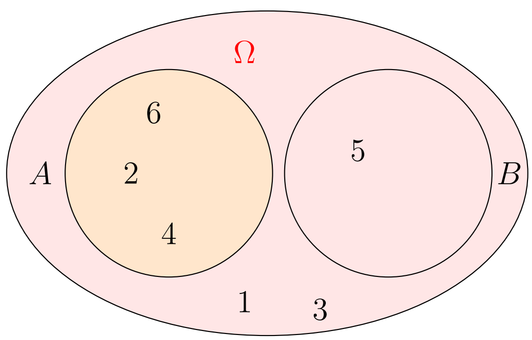
تعريف 7.3.4 : نقول أن الحدثان (A و B) متنافيان *Compatibles* إذا كان لديهم عنصر واحد على الأقل من العناصر المشتركة. ($A \cap B \neq \phi$)

و يكون الحدثان غير متنافيين *Incompatibles* عندما لا يكون هناك شيء مشترك بينهما. أي أن التقاطع بين الأحداث غير المتنافية فارغ. ($A \cap B = \phi$)

مثال 8 : الحدث A (الحصول على الرقم 2، 4 أو 6) والحدث B (الحصول على الرقم 2، 3 أو 5) عندما نرمي نرد ذوستة جوانب هما حدثان متنافيان لأنه من الممكن الحصول على 2 خلال الحدثين $A \cap B = \{2\}$.



الحدث A (الحصول على الرقم 2، 4 أو 6) والحدث B (الحصول على الرقم 5) عندما نرمي نرد ذوستة جوانب هما حدثان غير متنافيان لأنهما لا يتقاطعان.



تمارين مفتوحة

7.4 سلسلة التمارين رقم 4

تمرين 1 : في نهائي بطولة العالم لألعاب القوى للـ 100 متر، ثمانية عدائين، ثلاثة من هؤلاء العدائين جزائريون. الثلاثة عدائين الأوائل الذين يصلون هم من يعتلون إلى المنصة بترتيب وصولهم.

1 ـ كم عدد المنصات الموجودة؟

2 ـ كم عدد المنصات أين الفائزين جزائريون 100%؟

الحـــل

1 ـ بالنسبة للمرتبة الأولى لها 8 خيارات ممكنة والمرتبة الثانية 7 خيارات ممكنة والمرتبة الثالثة 6 خيارات ممكنة

وبالتالي ، فإن عدد المنصات المحتملة يساوي

$$8 * 7 * 6 = 336 \text{ خيارا ممكنا}.$$

2 ـ العداء الأول جزائري أي له 3 خيارات ممكنة والثاني أيضا جزائري تبقى له 2 خيارات ممكنة والثالث جزائري أيضا اي يبقى له 1 خيار واحد فإن عدد المنصات المحتملة يساوي

$$3 * 2 * 1 = 6 \text{ خيارات ممكنة}.$$

تمرين 2 : في مجموعة مكونة من 10 رجال و 8 نساء و 7 أطفال ، كم عدد الطرق المختلفة التي يمكننا وضعهم بها على خط مستقيم إذا كان: 1 ـ يمكن وضعها بحرية. 2 ـ رغبة الرجال في البقاء متجمعين.

الحـــل

1 ـ بوضعها بحرية توجد !3 طريقة إختيار الترتيب بين أوضاع الرجال والنساء و الأطفال، لكن هناك !10 طريقة في ترتيب الرجال كما أن هناك !8 طريقة في ترتيب النساء و !7 طريقة في ترتيب الأطفال ومنه عدد إمكانيات الترتيب هي:

$$3! * 10! * 8! * 7!$$

2 ـ بوضعنا الرجال مجتمعين معا تكون هناك !3 طريقة إختيار الترتيب بين أوضاع الرجال والنساء و الأطفال، لكن هناك طريقة واحدة لإختيار الرجال لكن تبقى !8 طريقة لترتيب النساء و !7 طريقة لترتيب الأطفال ومنه عدد إمكانيات الترتيب هي:

$$3! * 1! * 8! * 7!$$

تمرين 3 : نريد أن نضع على الرف 4 كتب للرياضيات (مختلفة) و 6 كتب للفيزياء و 3 كتب للكيمياء. كم عدد الطرق التي يمكننا بها تنظيم أو ترتيب هذه الكتب على الرف حيث:

1 ـ إذا جمعنا الكتب حسب الموضوع.

2 ـ إذا جمعنا كتب الرياضيات فقط.

الحـــل

1 ـ يوجد !3 طريقة لاختيار ترتيب المواد. مثل هذه الطريقة المختارة ، هناك !4 طريقة ترتيب لكتب الرياضيات !6 طريقة لترتيب كتب الفيزياء ، و!3 طرق ترتيب كتب الكيمياء. عدد إمكانيات الترتيب هي:

$$3! * 4! * 6! * 3!.$$

2 ـ قد يكون هناك من $0, 1, ..., 9$ كتاب وضعت قبل كتب الرياضيات. لذلك هناك 10 اختيارات لعدد الكتب الموضوعة قبل كتاب الرياضيات. في هذه الاختيارات ، هناك!4 طريقة لوضع كتب الرياضيات ، و !9 طريقة لوضع الآخرين : لذلك هناك ما مجموعه

$$10 * 4! * 9!$$

ترتيب مختلف.

تمرين 4 : عد الجناس من الكلمات التالية : $MATHS$، $RIRE$، $ANANAS$.

الحـــل

يقابل الجناس الناقص تبديل حروف الكلمة. ولكن إذا استبدلنا حرفين متطابقين، نجد نفس الكلمة! لذلك يجب أن نقسم العدد الإجمالي للتبديل على عدد التباديل بين الحروف المتطابقة. لذلك نجد:

1− تحتوي كلمة $MATHS$ على 5 حروف، نستطيع تكوين ماعدده $5!$ من الكلمات من نفس الحروف.

2− تحتوي كلمة $RIRE$ على 4 حروف من بينهم حرف مكرر مرتين، نستطيع تكوين ماعدده $4!/2!$ من الكلمات من نفس الحروف.

3− تحتوي كلمة $ANANAS$ على 6 حروف من بينهم حرف مكرر مرتين و حرف مكرر ثلاث مرات، نستطيع تكوين ماعدده $6!/(2! * 3!)$ من الكلمات من نفس الحروف.

تمرين 5 : يوجد في بيتي سلم مكون من 11 درجة. لكي أنزل بهذا السلم أو الدرج ، يمكنني في كل خطوة أن أنزل خطوة واحدة أو أنزل خطوتين أو أنزل ثلاث خطوات في المرة الواحدة. كم عدد الطرق التي يمكن أن أنزل بها هذا الدرج؟

الحـــل

نضع $S(n)$ عدد طرق نزول السلم يحتوي 4 خطوات.

لدينا $S(1) = 1$ ، $S(2) = 2$ (إما أن ننزل خطوة واحدة مرتين ، أو ننزل خطوتين دفعة واحدة) ، و $S(3) = 4$ أو خطوتنا الأولى للنزول ثلاث خطوات، تبقى خطوة واحد لأسفل ، أو النزول خطوة واحدة ، وهناك خطوتين لأسفل . بمعنى آخر ،$S(3) = 1 + 1 + S(2) = 4$.

الآن دعونا نبحث عن صيغة التكرار لـ $S(n)$ عندما تكون n أكبر من أو تساوي 4. حيث نفكر وفقًا للخطوة الأولى:

ننزل خطوة واحدة فقط: في هذه الحالة ، لا يزال هناك سلم مع $n - 1$ خطوات للنزول ، وبالتالي إمكانيات $S(n - 1)$.

أو ننزل خطوتين: في هذه الحالة ، لا يزال هناك درج مع $n - 2$ خطوات للنزول ، وبالتالي إمكانيات $S(n - 2)$.

وإلا فإننا ننزل ثلاث خطوات: في هذه الحالة ، لا يزال هناك درج مع $n-3$ خطوات للنزول ، وبالتالي إمكانيات $S(n-3)$.
لذلك لدينا صيغة التكرار

$$S(n) = S(n-1) + S(n-2) + S(n-3)$$

يجب أن نحسب $S(11)$. هناك عدة طرق ممكنة. يمكننا على سبيل المثال استخدام الخوارزميات، على سبيل المثال بإستعمال التطبيق R

```
S=function(x){ if (x<1) { 0}
else if ( x==1) {1}
else if ( x==2) {2}
else if ( x==3) {4}
else {
S(x-1)+S(x-2)+S(x-3)}}
```

نجد أن

$$S(11) = 504 \text{ طريقة ممكنة}$$

تمرين 6 : في غرفة واحدة ، يوجد طاولتين. تحتوي الأولى على 3 كراسي مرقمة من 1 إلى 3، والثانية تحتوي على 4 كراسي مرقمة من 1 إلى 4.
يدخل سبعة أشخاص. كم عدد الاحتمالات الموجودة لتوزيعهم حول هذين الطاولتين؟

الحـــل

نبدأ باختيار الأشخاص الذين سيستقرون حول الطاولة الأولى. هناك (C_7^3) احتمالية.
بعد ذلك ، يمكن للأشخاص الثلاثة الموجودين حول الطاولة الأولى اختيار مكانهم بحرية. يوجد $3!$ إختيار (ما يصل إلى تبديل 3 كراسي). وبالمثل ، هناك $4!$ خيارات للأشخاص الذين يجلسون حول الطاولة الثانية. وبالتالي فإن العدد الإجمالي للإمكانيات هو

$$C_7^3 * 3! * 4! = 7!.$$

النتيجة $7!$ يوضح أن التعداد الذي قمنا به ، والذي يتبع البيانات الواردة في البيان ، يمكن تبسيطه.
في الواقع ، إن حقيقة فرض طاولتين لا يغير المشكلة فعلياً: يجب أن نضع 7 أشخاص على 7 كراسي ، وهناك $7!$ طريقة مختلفة للقيام بذلك.