الفصل الثاني / المجال الكهربائي
The Electric Field

(1–2) المجال الكهربائي The Electric Field

تعرفنا في المحاضرة السابقة على خصائص القوة الكهربائية المتبادلة بين شحنات نقطية، و تعلمنا كيفية حساب هذه القوة باستخدام قانون كولوم، و تأثير الشحنات الكهربائية بعضها على بعض ، حيث ندرس تأثير الشحنة الواحدة على غيرها من الشحنات خلال المجال الذي تكونه الشحنة حول نفسها، و الذي يؤثر بدوره على الشحنات الأخرى. و سنتعرف على مفهوم المجال بشكله العام في الفيزياء، ثم نناقش المجال الكهربائي، و نتعلم كيفية حساب شدته لتوزيعات متنوعة من الشحنات. و أخيراً ندرس تأثير المجال الكهربائي على الشحنات الموجودة في منطقة تأثيره.

1- تعريف المجال:

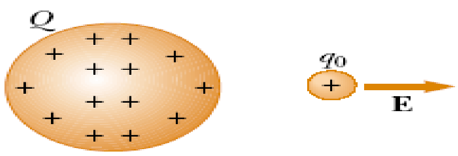
هو الحيز المحيط بالجسم المشحون . ولذلك يصاحب أى جسم مشحون مجال كهربي يحيط به ويؤثر على أي شحنة تقع داخل حيز هذا المجال بقوة تنافر أو تجاذب حسب نوع هذه الشحنة (موجبة أو سالبة) . ويمكن الكشف عن وجود مجال كهربي عند نقطة ما بوضع جسم مشحون بشحنة موجبة صغيرة q_0 وتسمى بشحنة إختبار test charge فإذا تأثرت هذه الشحنة بقوة كهربائية فهذا يعنى وجود مجال كهربائي عندها.

2- حساب شدة المجال الكهربائي

تعرف شدة المجال الكهربائي E في نقطة ما بأنها **القوة المؤثرة لوحدة الشحنة على شحنة الاختبار الموجبة الموضوعة في هذا المجال.**

$$E = \frac{F}{q_0} \qquad (1)$$

حيث تمثل E المجال الكهربائي ، و F القوة (Force), التي يؤثر بها على شحنة اختبار (test charge) موجبة قيمتها q_0 موضوعة في تلك النقطة. و من هذا التعريف نرى أنه لحساب شدة المجال الكهربائي E عند نقطة ما، فإنه يمكن تخيل وجود شحنة موجبة q_0 في تلك النقطة، ثم حساب القوة التي يؤثر المجال بها على هذه الشحنة، و من ثم توجد قيمة المجال E من المعادلة (1) كما في الشكل(1) .



شكل (1)

وحدة المجال الكهربائي هي نيوتن لكل كولوم (N\C) . ومن خصائص شحنة الاختبار: Test Charge أنها موجبة و صغيرة جدا, حيث $\vec{E}$ كمية متجه واتجاهها نفس اتجاه القوة الكهربائية $\vec{F}$ المؤثرة على شحنة الاختبار الموجبة q_o

1- شدة المجال الكهربائي لشحنة نقطية

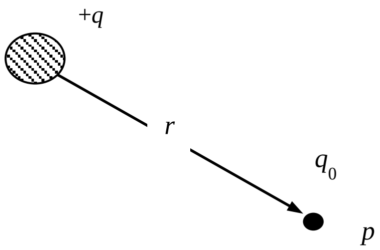
ولإيجاد شدة المجال الكهربائي E الناتج عن شحنة نقطية q، عند نقطة مثل p تبعد عن الشحنة مسافة r، كما في الشكل (2). نفترض وجود شحنة اختبار موجبة صغيرة، مثل q_0 في النقطة p. ثم نحسب القوة التي تؤثر بها الشحنة q على شحنة الاختبار q_0، و أخيراً نقسم القوة F على q_0 لإيجاد قيمة E.

$$F = K\frac{q\,q_0}{r^2}\hat{r} \qquad (2)$$

حيث تمثل $\hat{r}$ وحدة متجهات باتجاه r، أي أن

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|r|}$$

و لإيجاد المجال الكهربائي نعوض قيمة F في المعادلة (1).



شكل (2)

$$E = \frac{F}{q_0} = K\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad (3)$$

و نلاحظ من هذه المعادلة أن المجال E لا يعتمد على مقدار شحنة الاختبار q_0، و إنما يعتمد على الشحنة q (مصدر المجال)، و على المسافة r (التي تحدد مكان النقطة المراد حساب المجال عندها). و بينما يكون اتجاه المجال E الناتج عن شحنة موجبة هو اتجاه r (مثل اتجاه القوة F) يكون اتجاه المجال E الناتج عن شحنة سالبة يكون عكس اتجاه r.

2- شدة المجال الكهربائي لعدد من الشحنات النقطية

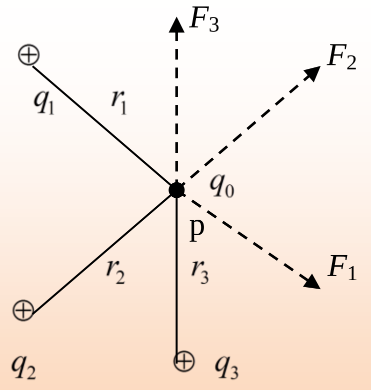
في أي منطقة عندما تعاني شحنة كهربائية من تأثير قوة كهربائية فان ذلك يدل على وجود المجال الكهربائي. إن هذه القوة تعزى إلى شحنات كهربائية أخرى موجودة في المنطقة ذاتها، فعلى سبيل المثال لو كان هناك عدد من الشحنات النقطية المعزولة $q_1, q_2, q_3,\ldots$الخ، تقع على أبعاد $r_1, r_2, r_3,\ldots$الخ على التوالي من شحنة اختبارية q_0 موضوعة عند النقطة p كما مبين في الشكل (3)، فيمكن استعمال قانون كولوم في حساب شدة المجال الكهربائي في تلك النقطة بتطبيق مبدأ التراكيب، أي حساب شدة المجال الناشئ عند كل شحنة نقطية على حده كما لو كانت هي الشحنة الوحيدة الموجودة ، ثم بجمع الإسهامات المنفردة اتجاهياً نحصل على :

$$\vec{F_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_0}{r_1^2}\hat{r}_1 \quad , \quad \vec{F_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_0}{r_2^2}\hat{r}_2 \quad \vec{F_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3q_0}{r_3^2}\hat{r}_3$$

$$\therefore \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_i \vec{F_i}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_0}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_0}{r_2^2}\hat{r}_2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3q_0}{r_3^2}\hat{r}_3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^2}\hat{r}_2 + \frac{q_3}{r_3^2}\hat{r}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$



الشكل (3): إسهامات القوى الكهربائية المؤثرة على q_0 الناتجة عن مجموعة من الشحنات النقطية q_1 و q_2 و q_3.

وحيث أن :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^2}\hat{r}_2 + \frac{q_3}{r_3^2}\hat{r}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

أو

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

حيث المعامل i يشير إلى الشحنات النقطية المؤثرة على النقطة p.

(3)– المجال الكهربائي الناشئ عن توزيع متصل للشحنة
Electric Field of a Continuous Charge Distribution

كثيراً ما تكون المسافات بين الشحنات في مجموعة الشحنات الموزعة على سطح جسم موصل اصغر بكثير من المسافة بين هذه الشحنات وبعض النقاط المطلوب إيجاد شدة المجال الكهربائي عندها. في مثل هذه الحالة يكون نظام الشحنات مستمراً (متصلاً). ولغرض حساب شدة المجال الكهربائي الناشئ عن شحنة موزعة بشكل متصل تُتَبعُ الإجراءات الآتية :

1- تقسَّم الشحنة إلى عدد كبير من العناصر الصغيرة، كل منها يحوي مقدار Δq من الشحنة كما مبين في الشكل (4).

2- تحسب شدة المجال الكهربائي ΔE الناشئ عن احد عناصر الشحنة Δq في النقطة p وفق المعادلة:

$$\overrightarrow{\Delta E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q}{r^2}\hat{r} \qquad \ldots\ldots\ldots(5)$$

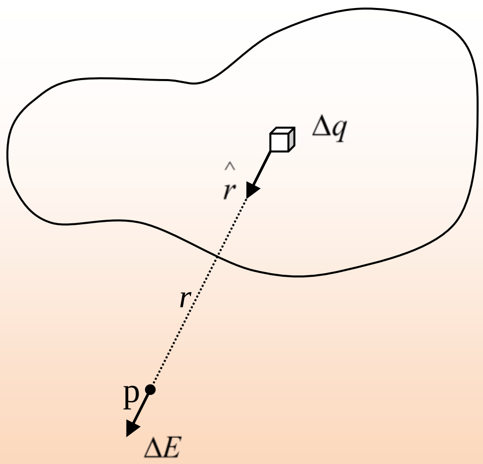
حيث r تمثل المسافة من عنصر الشحنة إلى النقطة p و $\hat{r}$ تمثل وحدة الشحنة بالاتجاه من عنصر الشحنة إلى النقطة p.

تحسب شدة المجال الكهربائي الكلية عند p الناشئ عن جميع عناصر الشحنة ذات التوزيع المستمر وذلك بجمع إسهامات كل العناصر على الموصل حيث:

$$\vec{E} \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{r}_i \qquad ....(6)$$

المعامل i يشير إلى عناصر الشحنة في التوزيع. فإذا كانت هذه العناصر Δq_i متناهية الصغر بحيث $\Delta q_i \to 0$ عندئذ يتحول الجمع إلى تكامل وعليه:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\Delta q_i \to 0}\sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{r}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r} \qquad ....(7)$$



الشكل (4): المجال الكهربائي في p الناشئ عن توزيع متصل للشحنة الذي يمثل المجموع ألاتجاهي للمجالات ΔE الناشئة عن عناصر الشحنة Δq.

ويمكن حساب هذا النوع من التكامل على حالات تكون فيها الشحنة موزعة على طول خط مستقيم أو على سطح أوعلى حجم حسب كثافة الشحنة طولية او سطحية او حجمية .

مثال \ الشكل يبين ثلاث شحنات q1,q2,q3 جميعها واقعة في المستوي xy المطلوب حساب شدة المجال في نقطة الاصل علما بان $q_3=50x10^{-9}$ C , $q_2=-3x10^{-9}$ C , $q_1=-16x10^{-9}$ C

تطبيقات عن كيفية حساب شدة المجال الكهربائي

1- مجال ثنائي قطب كهربائي

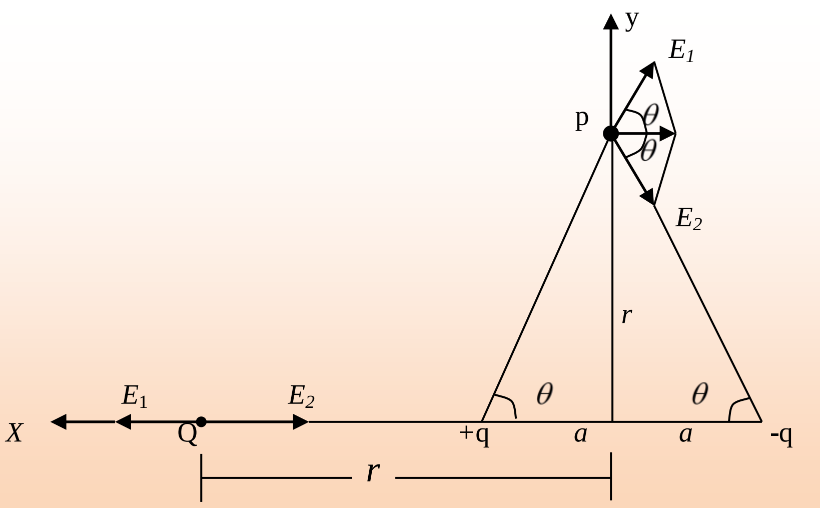
يتكون ثنائي القطب الكهربائي من شحنة موجبة +q وأخرى سالبة –q تفصلهما مسافة صغيرة كما مبين في الشكل (5) .

أ- الآن بالإمكان إيجاد المجال الكهربائي الناشئ عن الشحنتين +q و -q عند النقطة p الواقعة على العمود المنصف لمحور ثنائي القطب والنقطة Q على امتداد محور ثنائي القطب. عند النقطة p المجال الكهربائي E1 يساوي E2 بسبب أن p تقع على نفس المسافة من الشحنتين حيث:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2 + a^2} \qquad ....(8)$$

ولأجل إيجاد محصلة المجال الكهربائي لابد من تحليل كل من E1 و E2 إلى مركبتين أحداهما عمودية على محور ثنائي القطب والأخرى موازية له ومن تماثل الشكل نجد إن المركبتين العموديتين على المحوريمحو أحداهما الأخرى أما المركبتين الموازيتين تضاف أحداهما إلى الأخرى لكونهما باتجاه محور ثنائي القطب نحو اليمين. وبإجراء الجمع ألاتجاهي لكلتا المركبتين، أي :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$



الشكل (5) : شدة المجال الكهربائي عند نقاط في المجال لثنائي القطب.

يكون مقدار المجال الكهربائي المحصّل E هو :

$$E = E_1\cos\theta + E_2\cos\theta = 2E_1\cos\theta \qquad ....(9)$$

وبالتعويض عن E1 من المعادلة (8-4) في المعادلة (8-5) ينتج:

$$E = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2 + a^2}\frac{a}{(r^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qa}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

وبما أن $r>>a$ فان:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qa}{r^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3} \qquad \text{.........(10)}$$

حيث $p = 2qa$ تعني العزم الكهربائي لثنائي القطب وهو كمية متجهة، اتجاهها من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة.

ب - أما شدة المجال عند النقطة Q فيمكن إيجادها من إيجاد E_1 و E_2 حيث أن :

$$\vec{E_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r-a)^2}\hat{r}$$

$$\vec{E_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{(r+a)^2}\hat{r}$$

وكما واضح من الشكل (5) فان اتجاه المجال الكهربائي E_1 الناشئ عن الشحنة q+ هو بعكس اتجاه المجال E_2 الناشئ عن الشحنة q– ، وبهذا فان شدة المجال الناشئ عن ثنائي القطب E يساوي المجموع ألاتجاهي لكلتا المعادلتين أعلاه، أي أن :

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$$

أما مقدار محصلة المجال الكهربائي فتساوي:

$$E = E_1 - E_2$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(r-a)^2} - \frac{q}{(r+a)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{4ra}{(r^2-a^2)^2}\right] \text{.... (11)}$$

الإشارة الموجبة لناتج المحصلة E تدل على أن اتجاه E عند النقطة Q يكون على امتداد محور ثنائي القطب باتجاه E_1 أي نحو اليسار وعند r>>a يمكننا إهمال a^2 بالنسبة للمقدار r^2 عندئذ تأخذ المعادلة (11) الصيغة الآتية :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4aq}{r^3}$$

أو

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3} \qquad \text{.......... (12)}$$

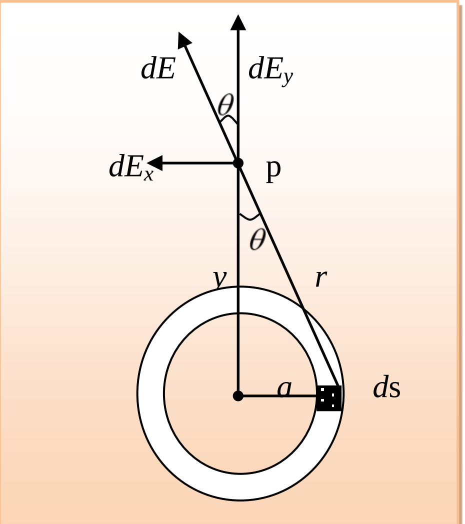
2- المجال الكهربائي الناشئ عن شحنة موزعة على طول خط مستقيم

ص50 (واجب بيتي)

$$\boldsymbol{E} = \sqrt{\boldsymbol{E}_X^2 + \boldsymbol{E}_Y^2} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{2\pi\epsilon_\circ a}}$$

3- المجال الكهربائي الناشئ عن حلقة مشحونة

يبين الشكل (6) حلقة نصف قطرها a تحمل شحنة موجبة مقدارها q موزعة بصورة متجانسة. والمطلوب حساب شدة المجال الكهربائي الناشئ عن الحلقة عند النقطة p الواقعة على محور الحلقة وعلى مسافة y من مركزها



الشكل (6)

نفرض أن الشحنة q مقسّمة إلى عناصر صغيرة طول كل منها ds، وان dq هي مقدار الشحنة التي يحملها الطولds وتساوي:

$$dq = \frac{q}{2\pi a} ds$$

ان شدة المجال dE الناشئ عن عنصر الطول ds عند النقطة p يكون باتجاه محور y الموجب، وان مقدار شدة المجال E الناشئ عن جميع عناصر الشحنة يمكن حسابه بتكامل المجالات الصغيرة الناشئة من كل العناصر المكونة لشحنة الحلقة، أي :

$$E = E_y = dE_y = \int dE\cos\theta \qquad \text{.........(13)}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qds}{2\pi a r^2}$$

$$\cos\theta = \frac{y}{r}$$

وبالتعويض عن هاتين المقدارين في المعادلة (13) نحصل على :

$$E = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\,ds}{2\pi a r^2} \frac{y}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qy}{2\pi a r^3} \int ds \qquad ....(14)$$

وباستعمال نظرية فيثاغورس للمثلّث القائم الزاوية نجد أن :

$$r = (y^2 + a^2)^{1/2}$$

$$\therefore r^3 = (y^2 + a^2)^{3/2}$$

$$\int ds = s = 2\pi a$$

وبالتعويض عن r^3 وناتج تكامل المعادلة (14) وبعد الترتيب نجد أن:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \qquad ....(15)$$

هذه النتيجة تبين أن شدة المجال الكهربائي في مركز الحلقة يساوي صفراً (لماذا؟).

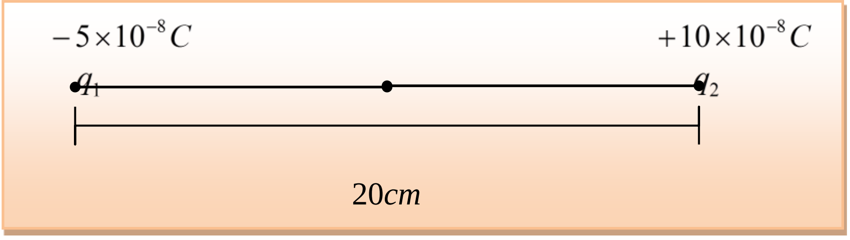
وفي الحالات الخاصة عندما تكون النقطة p بعيدة جداً عن مركز الحلقة أي y>>a يمكن إهمال a2 مقارنةً بـ y2 وتصبح شدة المجال الكهربائي:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{y^2} \qquad ....(16)$$

أن هذه المعادلة تظهر وكأنها ناتجة عن شحنة نقطية.

تمرينات ص 81

1-2 : شحنتان نقطيتان مقدارهما $+10\times10^{-8}C$ و $-5\times10^{-8}C$ تفصلهما مسافة مقدارها $20cm$ كما في الشكل أوجد
1- مقدار شدة المجال الكهربائي واتجاهه عند منتصف المسافة بينهما ، 2- لو وضع إلكترون في هذه النقطة فما مقدار القوة الكهربائية واتجاهها المؤثرة عليه.



الحل :

1- تحسب شدتي المجال الكهربائي E_1 و E_2 للشحنتين q_1 و q_2 على انفراد في منتصف المسافة بين الشحنتين كما يأتي :

$$E_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}=9\times10^9\frac{5\times10^{-8}}{(0.1)^2}=4.5\times10^4\,N.C^{-1}$$

$$E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r^2}=9\times10^9\frac{10\times10^{-8}}{(0.1)^2}=9\times10^4\,N.C^{-1}$$

وبما أن المجال الناشئ عن الشحنة q_1 يكون بنفس اتجاه المجال الناشئ عن الشحنة q_2 أي باتجاه اليسار، فأن :

وأن

$$\vec{E}=\vec{E_1}+\vec{E_2}$$

$$E=4.5\times10^4+9\times10^4=13.5\times10^4\,N.C^{-1}$$

2- هناك خياران للحل:

الخيار الأول:

تُستعمل المعادلة (8-1) لإيجاد القوة المؤثرة على الإلكترون (e) الموضوع في منتصف المسافة بين الشحنتين

$$F=13.5\times10^4\times1.6\times10^{-19}=2.16\times10^{-14}\,N$$

الخيار الثاني :

يُستعمل قانون كولوم $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$ للشحنتين q_1 و q_2 لغرض إيجاد القوة المؤثرة على الإلكترون وعلى انفراد، أي أن :

$$F_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}=9\times10^9\frac{5\times10^{-8}\times1.6\times10^{-19}}{(0.1)^2}=1.4400\times10^{-14}\,N$$

$$F_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}=9\times10^9\frac{10\times10^{-8}\times1.6\times10^{-19}}{(0.1)^2}=0.7200\times10^{-14}\,N$$

وبما أن تأثير القوتين F_1 و F_2 على شحنة الإلكترون في منتصف المسافة بين الشحنتين q_1 و q_2 يكون باتجاه واحد ونحو اليمين، إذن:

$$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$$

$$F=1.4400\times10^{-14}+0.7200\times10^{-14}=2.16\times10^{-14}\,N$$

2-2 : ما مقدار واتجاه شدة المجال الكهربائي E الازم لكي تتعادل القوة الكهربائية المؤثرة على دقيقة الفا مع وزنها علما ان كتلة دقيقة الفا هي ($6.68\ X10^{-27}$ Kg) وشحنتها تساوي 2e+

3-2 : اذا كانت كلتا الشحنتين موجبتان في الشكل (2-8) فما مقدار واتجاه شدة المجال الكهربائي عند النقطة Q الواقعة على العمود المنصف لمحور ثنائي القطب ؟ افرض ان r>> L

4-2 : سلك عزل بشكل قوس دائرة نصف قطرها R ويحصر زاوية قدرها θ_0 عند مركز الدائرة . وزعة على طوله بانتظام شحنة قدرها q . اوجد شدة المجال عند مركز الدائرة ؟

7-2 : ثلاثة اجسام صغيرة كل منها تحمل شحنة مقدارها ($2\ x10^{-6}\ C$) وضعت على رؤوس مثلث متساوي الاضلاع , طول ضلعه 3 cm جد شدة المجال الكهربائي في مركز المثلث ؟

10-2 : شحنتان نقطيتان مقدارهما $4q$ و $-9q$ تفصلهما مسافة مقدارها $10cm$ عين موضع النقطة او النقاط الواقعة على الخط المار بالشحنتين والتي يكون عندها المجال الكهربائي صفرا ؟

خطوط القوة الكهربائية Lines of the Electric Force

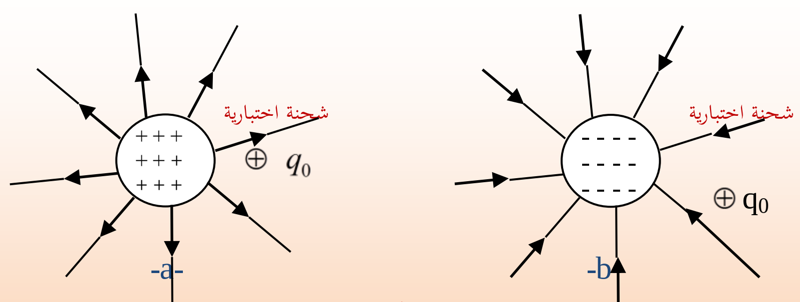
إن تأثير شحنة الاختبار الموضوعة عند نقطة ما في مجال كهربائي وتحركها باتجاه محصلة القوى الكهربائية المؤثرة عليها وفق المعادلة $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ يعطي طريقة في كيفية رسم خط القوة الكهربائية الذي يعرف بأنه المسار الذي تسلكه شحنة اختبارية موجبة موضوعة في نقطة ما في المجال الكهربائي.

إن خطوط القوة الكهربائية في المجال الكهربائي هي خطوط وهمية تنفذ خلال المجال الكهربائي، تنبع وتتجه بعيداً عن الشحنات الموجبة وتصب وتتجه نحو الشحنات السالب ، بحيث يكون اتجاهها في أي نقطة (نعني باتجاه مماسها) هو اتجاه المجال من تلك النقطة. إلا انه ليس من الضروري أن تكون كذلك دائماً، فقد تكون خطوط القوة مغلقة على نفسها كما في حالة المجال الكهربائي المتولد عن المجال المغناطيسي المتغير.

إن خطوط القوة الكهربائية لا تتقاطع مع بعضها مطلقاً لان تقاطعها في أي نقطة في المجال يعني إن هناك أكثر من اتجاه للمجال الكهربائي وهذا غير وارد، الأمر الذي يجعلنا أن نفترض صفة التنافر فيما بينها وهذا ما سنأتي إلى تأكيده لاحقاً.

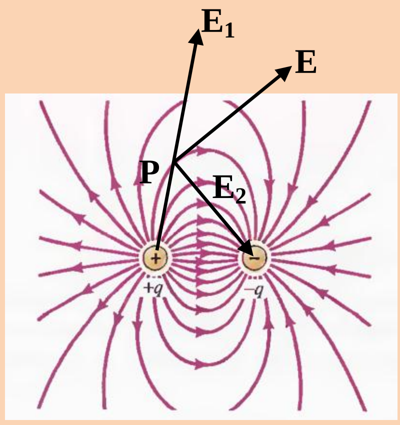
وفي بعض الأحيان عندما يكون الكلام عن شحنة معزولة أو كرة مشحونة موجبة كانت أم سالبة فان مجالها يمثل بهيئة خطوط (مستقيمة) حيث تتجه بالقرب من الكرة الموجبة قطرياً إلى الخارج بعيداً عنها وعلى المسارات المبينة في الشكل (7a) ، وتتجه بالقرب من الكرة السالبة قطرياً إلى الداخل نحو الكرة المشحونة على المسارات المبينة في الشكل (7b) ، وهذا ما يدلل علية اتجاه حركة الشحنة الاختيارية q_0 داخل مجال الشحنتين.

وفي كل الأحوال فان ما ذكر يوضح خاصية مهمة لخطوط المجال الكهربائي وهي إن هذه الخطوط لابد أن تنتهي عند الشحنات المولِّدة للمجال الكهربائي.



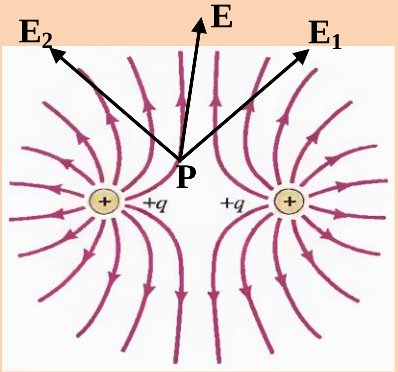
الشكل (7): خطوط القوة الكهربائية a– تتجه قطرياً إلى الخارج بعيداً عن سطح الكرة الموجبة.
b– تتجه قطرياً إلى الداخل نحو سطح الكرة السالبة.

يرينا الشكل (8) خطوط القوة لمجال كهربائي حول شحنتين متساويتين بالمقدار ومختلفتين بالإشارة تفصلهما مسافة صغيرة كما في بروتون وإلكترون ذرة الهيدروجين ، وهذا ما يدعى بثنائي القطب الكهربائي Electric Dipole. ويبدو من الشكل أن المماس لخط القوة في نقطة p يمثل متجه شدة المجال الكهربائي E.



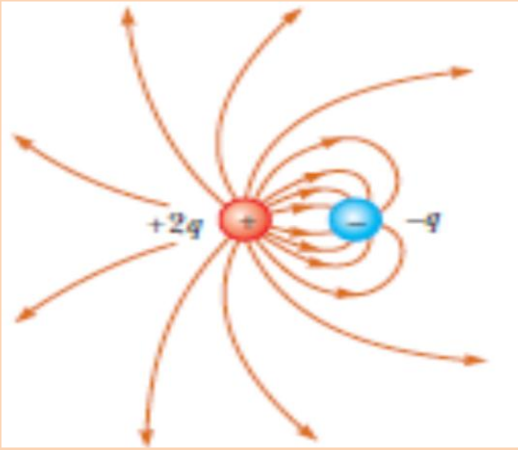
الشكل (8): خطوط القوة الكهربائية حول شحنتين متساويتين بالمقدار ومختلفتين بالإشارة .

أما الشكل (9) فيوضح خريطة المجال القائم بجوار شحنتين متساويتين بالمقدار ومتشابهتين بالإشارة كما في بروتوني جزيئة الهيدروجين. أن المجال الكهربائي يساوي صفراً عند نقطة منتصف المسافة بين الشحنتين.



الشكل (9) : خطوط القوة الكهربائية حول شحنتين متساويتين بالمقدار ومتشابهتين بالإشارة.

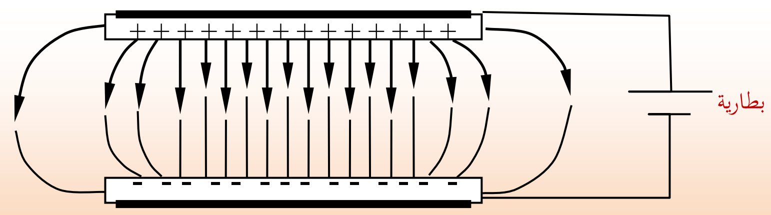
أن خريطة المجال القائم بجوار شحنتين مختلفتين في المقدار والإشارة الأولى $+2q$ والثانية q− يوضحها الشكل (10)، إذ يبدو من الشكل أن عدد الخطوط الخارجة من الشحنة $+2q$ تساوي ضعف الخطوط الداخلة إلى الشحنة q− . هنا نصف الخطوط الخارجة من الشحنة الموجبة تدخل الشحنة السالبة، أما النصف الباقي من الخطوط يفترض أن تنتهي في شحنة سالبة موجودة على مسافة اكبر بكثير من المسافة الفاصلة بين الشحنتين $+2q$ و q− وان عددها يكافئ عدد الخطوط الصادرة من شحنة q+ .



الشكل (10) : خطوط القوة الكهربائية لشحنتين نقطيتين $+2q$ و $-q$ ويظهر أن الخطوط الخارجة من $+2q$ هي ضعف الخطوط الداخلة إلى $-q$.

مما سبق يتبين أن خطوط المجال لا تمثل اتجاه القوة الكهربائية فحسب ولكنها تعتبر مؤشراً على المقدار النسبي لها مثلما هو مؤشرٌ على الشدة النسبية للمجال الكهربائي. فحيثما تكون الخطوط محتشدة تكون القوة كبيرة ومقدار شدة المجال الكهربائي كبيرٌ وهذا يلاحظ في المناطق القريبة من الشحنة (انظر الأشكال أعلاه)، وكلما تباعدت الخطوط كما في الوضع عند المناطق البعيدة من الشحنة تكون القوة اضعف ومقدار شدة المجال الكهربائي اقل. وهكذا يمكن اعتبار كثافة خطوط القوة الكهربائية بمثابة قياس لمقدار شدة المجال الكهربائي، وعليه فان عدد خطوط القوة لوحدة المساحة التي تقطع مساحة صغيرة عمودية على المجال عند نقطة معينة تمثل مقدار شدة المجال الكهربائي عند تلك النقطة.

من ناحية أخرى فان خطوط القوة الكهربائية تعطي للقارئ صورة عن طبيعة المجال الكهربائي، فمن ملاحظة الشكل (11) الذي يمثل لوحين موصلين متوازيين مشحونين بصورة متعاكسة بنفس المقدار، نجد أن المجال الكهربائي الناشئ عنها يكون منتظماً وثابتاً في الفسحة بين اللوحين، حيث خطوط القوة تصطف بصورة موازية لبعضها البعض وتفصل فيما بينها مسافات متساوية، فيما يكون المجال غير منتظمٍ في المناطق القريبة من حافتي اللوحين لوجود التقوس في خطوط القوة الكهربائية.



الشكل (11) : المجال الكهربائي المتكون بين لوحين متوازيين متعاكسي الشحنة.

Flux of the Electric Field فيض المجال الكهربائي

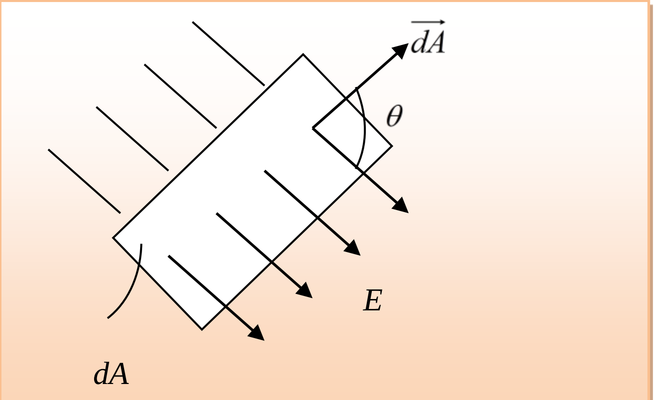
عندما نتكلم عن شدة المجال الكهربائيE في أية نقطة فإننا نقصد عدد خطوط القوة الكهربائية في وحدة المساحة التي تعبر سطحاً عمودياً على المجال القريب من تلك النقطة. وسنطلق على العدد الكلي لخطوط القوة التي تعبر السطح بفيض المجال الكهربائي ϕ. و يعبر عن العلاقة بين فيض المجال الكهربائي وشدته على النحو الآتي:

$$\phi = EA \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

و هي علاقة خاصة بالحالة التي يكون فيها المجال منتظماً وبالاتجاه العمودي على السطح. أما إذا كان المجال غير منتظم أو غير عمودي على السطح، فان عدد الخطوط المخترقة للسطح يمكن إيجادها بتعبير رياضي يشمل موقفاً مهماً آخر غير المشار إليه في العلاقة (17). في الشكل (12) يمثل dA مساحة متناهية في الصغر من السطح، بحيث أن العمود عليه يصنع زاوية θ مع اتجاه المجال، وإن عدد الخطوط $d\phi$ خلال السطح:

$$d\phi = E(\cos\theta dA) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

حيث $dA\cos\theta$ مسقط المساحة dA العمودية على المجال الكهربائي، و E شدة المجال عند النقطة التي تقع فيها dA. وبصيغة المتجهات تكتب المعادلة كما يأتي:



الشكل (12)

$$\vec{d\phi} = \vec{E}.\vec{dA}$$

وبإجراء التكامل السطحي للمعادلة (18) نحصل على الفيض الكلي خلال السطح:

$$\phi = \oint_A E\cos\theta dA \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

هنا حدود التكامل تدل على شمول السطح بأجمعه، وان وضع الدائرة في وسط علامة التكامل تشير إلى الحالة التي يكون فيها السطح مغلقاً.

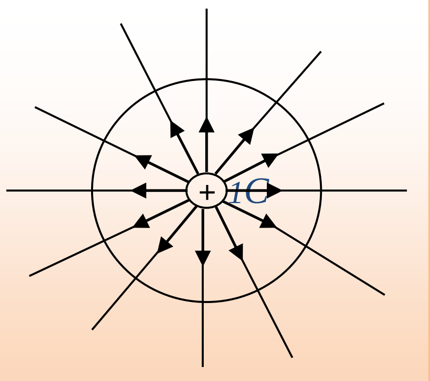
مثال:

يبين الشكل (13) شحنة موجبة قدرها 1C وضعت في مركز سطح كروي نصف قطره r. احسب عدد خطوط القوة الكهربائية التي تنفذ خلال هذا السطح.

الحل :

لدينا $K=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\times10^9$

وان $\frac{1}{\varepsilon_0}=36\pi\times10^9$



الشكل (13)

وبما أن خطوط المجال الكهربائي المنبعثة عن الشحنة الموجبة 1C في حالتنا هذه بالاتجاه ألشعاعي، فان السطح الكروي يكون عمودياً عليها، وبذلك يصبح بالإمكان استعمال المعادلة (17) لحساب عدد خطوط القوة الكهربائية المخترقة للسطح ϕ، أي :

$$\phi = EA$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.4\pi r^2$$

$$\phi=\frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \text{.........(20)}$$

وبالتعويض عن قيمة $\frac{1}{\varepsilon_0}$ في المعادلة (20) نحصل على:

$$\phi=36\pi\times10^9$$

يمكن أن نستنتج إن فيض المجال الكهربائي خلال السطح الكروي المفترض يعتمد على مقدار الشحنة في داخله ولا يعتمد على نصف قطره، كما هو واضح في المعادلة (20).

قانون كاوس Gauss's Law

في هذا البند سوف نناقش علاقة مهمة تربط فيض المجال الكهربائي خلال سطح افتراضي مغلق (يسمى سطح كاوس) قد يكون منتظماً أو غير منتظم والشحنة الكلية التي يحتضنها السطح. هذه العلاقة هي تعبير لقانون شهير صاغه العلامة الرياضي البارع كارل فردريك كاوس (1777-1855)، وتتجلى أهميته بصورة رئيسية في إرساء أسلوب بسيط لحساب المجالات الكهربائية في الحالات التي يكون فيها المجال بقدرٍ كافٍ من التماثل. أي في الحالات التي يكون توزيع الشحنات فيها ذا هندسة بسيطة بحيث يسمح لنا باختيار أسطح افتراضية بسيطة مثل التماثل الكروي، التماثل الاسطواني، والتماثل الاستوائي التي سيتم تناولها فيما بعد.

المعادلة (20) كان قد اسند اشتقاقها على أساس مجال الشحنة الموجبة q، ولكن السطح الافتراضي المغلق قد يحتوي على شحنة خالصة*، وعليه فمن المنطق تعميم هذه النتيجة لتشمل القيمة الإجمالية للشحنة المحتمل وجودها داخل السطح المغلق ويرمز لها بـ q_{tot} بدلاً من q. وبعد التعويض عن قيمة ϕ من المعادلة (19) في المعادلة (20) نحصل على:

$$\oint_A E\cos\theta dA = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0} \qquad \ldots\ldots\ldots(21)$$

حيث

$$q_{tot} = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_i q_i$$

تعرف المعادلة (21) وكذلك المعادلة (20) باسم قانون كاوس الذي ينص على أن: **التكامل السطحي للمركبة العمودية لشدة المجال الكهربائي على سطح مفترض مغلق يساوي القيمة الإجمالية للشحنة المحتواة داخل السطح المغلق q_{tot} مقسوماً على سماحية الفضاء الحر أو سماحية الفراغ ε_0.**

ولو نظرنا إلى المعادلة (21) واستقرأنا جيداً نص قانون كاوس لأمكن وضع النقاط الآتية:

1- الشحنة q_{tot} تمثل حصرياً الشحنة الموجودة داخل السطح المفترض المغلق (سطح كاوس) بنوعيها سواء كانت موجبة أم سالبة.

2- إذا كانت الشحنة ذات توزيع متصل فينبغي أن يؤخذ ذلك الجزء من الشحنة الواقع داخل سطح كاوس فقط ويهمل الجزء الآخر لعدم إسهامه في تغيير فيض المجال الكهربائي المخترق للسطح.

3- إذا كانت الشحنة الخالصة داخل السطح مزيجاً متكافئاً من الشحنات السالبة والموجبة فان قيمة الفيض خلال السطح المغلق تكون صفراً.

* نقصد بالشحنة الخالصة مجموعة من الشحنات النقطية سواء كانت موجبة أم سالبة (بدلاً من شحنة نقطية واحدة q كالتي تظهر في المعادلة 8-27).

4- في الحالة التي تكون فيها الشحنة الكلية داخل سطح كاوس المفترض تساوي صفراً ، فان قيمة الفيض الكهربائي خلال السطح تساوي صفراً أيضا.

الاستنتاجات من قانون كاوس فيما يخص الشحنة داخل الموصل

الشكل يمثل جسما وصلا ممتلئا غير منتظم الشكل اعطية شحنة مقدارها q فان هذه الشحنة تتوزع كليا على السطح , نرسم سطح منقط يسمى بسطح كاوس داخل الجسم وقريب من السطح الخارجي وبالرجوع الى قانون كاوس ان عدد الخطوط التي تعبر هذا السطح مساوية الى. $\frac{1}{\varepsilon_0}$ مضروبا في المقدار الصافي للشحنة ضمن السطح .

بما ان الشحنات ساكنة يكون المجال الكهربائي عند جميع سطح كاوس يساوي صفر , وعلية العدد الكلية لخطوط القوى التي تعبر السطح الكاوس صفرا والشحنة الفائضة تستقر كلها على السطح الخارجي للموصل . شدة المجال داخل الجسم الموصل المشحون يساوي صفرا (لان الشحنات تستقر على السطح)

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0$$

اما اذا كان الجسم مجوف ايضا لاتوجد شحنة داخل هذا السطح وهذا يدل على عدم وجود شحنة ولا مجال في الفجوة نفسها .

الاستنتاجات من قانون كاوس فيما يخص المجال خارج الموصل المشحون

الشكل يبين شحنة مقدارها q موزعة بانتظام بشكل كرة نصف قطرها R , نرسم سطح كاوس بشكل سطح كروي متحد المركز مع الشحنة وبنصف قطر r وبتطبيق قانون كاوس على هذا السطح

θ هي الزاوية المحصورة بين خطوط المجال والعمود على السطح

$$\oint_A E\cos\theta dA = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$\theta=0$ $:\cos 0 = 1$

لان E عمودي على سطح كاوس

$$E.A = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

Aهي مساحة سطح كاوس الافتراضي

$$E.4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

نستنتج ان شدة المجال خارج كرة مشحونة يظهر وكأنها هذه الشحنة متجمعة في مركزها وهي نفس النتيجة في حالة الشحنة النقطية

تطبيقات على قانون كاوس Applications of Gauss's Law

يستعمل قانون كاوس في حساب شدة المجال الكهربائي في الحالات التي يكون فيها توزيع الشحنات ذا تماثل بسيط مثل شحنة خطية منتظمة أو شحنة كروية منتظمة أو صفيحة مستوية منتظمة الشحنة أو قرص دائري منتظم الشحنة بحيث يسمح لنا اختيار سطح كاوس ملائم ينسجم مع تناظر المجال.ومن اعتبارات التناظر يكون لشدة المجال قيمة ثابتة مما يجيز إخراج E خارج علامة التكامل لقانون كاوس المتمثل بالمعادلة :

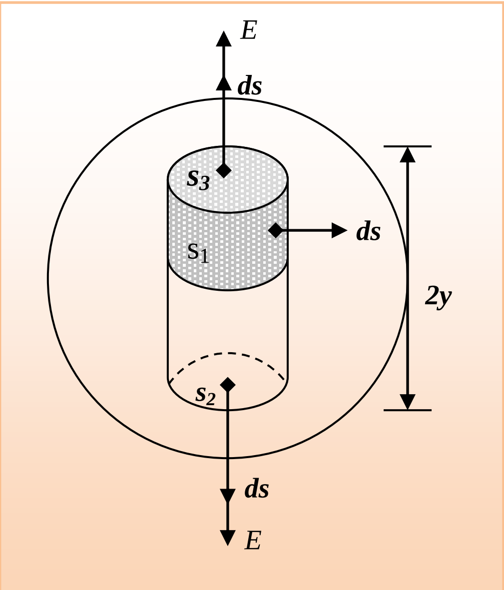
$$\oint_A E\cos\theta dA = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

إن حساب الطرف الأيسر من المعادلة ، يتطلب تجزئة سطح كاوس المغلق إلى عدد من السطوح التفاضلية، ومن معرفة θ المحصورة بين اتجاه المجال وقيمة السطوح التفاضلية يمكن إيجاد ناتج التكامل السطحي دون الخوض في عمليات التكامل المعقدة.

أن اعتماد أسلوب كاوس في حل المسائل المتعلقة بحساب شدة المجال الكهربائي هي ابسط بكثير من طريقة التكامل السطحي المعقدة التي اعتمدت في السابق، كما سيتضح عند حساب شدة المجال الكهربائي في عدد من الحالات، حيث يكون توزيع الشحنات الكهربائية بأشكال مختلفة كما في الأمثلة الآتية:

1-المجال لمستوي مشحون وغير محدد

يبين الشكل (14) جزءاً من قرص دائري لانهائي يحمل شحنة موجبة موضوعة بصورة متجانسة بكثافة سطحية قدرها σ . والمطلوب حساب شدة المجال الكهربائي عند نقطة واقعة على محور القرص وتبعد مسافة y عن مركزه.



الشكل (14)

الحل:

إن أفضل سطح كاوسي هو اسطوانة شبيهة بعلبة أقراص مساحة مقطعها s وارتفاعها 2y، توضع بحيث يكون محورها عمودياً على مستوي القرص.

نقسِّم سطح الاسطوانة (سطح كاوس) إلى ثلاثة أقسام هي s1 وs2 وs3 ثم نطبِّق معادلة كاوس على كل من هذه الأسطح لغرض حساب E فيكون:

$$\oint_s E\cos\theta ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{s_1} E\cos 90 ds + \int_{s_2} E\cos 0 ds + \int_{s_3} E\cos 0 ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$$0 + \int_{s_2} E ds + \int_{s_3} E ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

تكون E خارج علامة التكامل لثبوت قيمتها على السطح الذي يقع على بعد ثابت قدره y من الشحنة السطحية q_{tot} فيكون:

$$ES + ES = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

ومنها

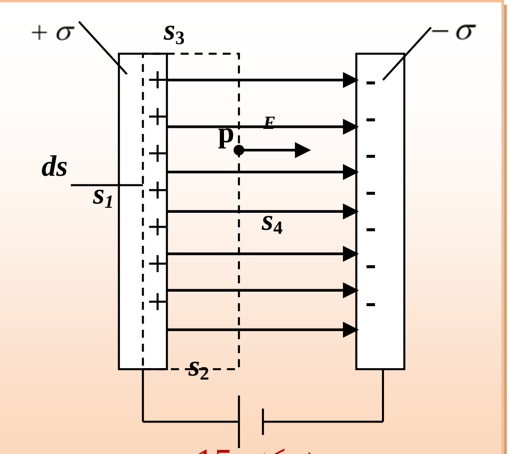
$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

حيث σS هي مقدار الشحنة السطحية الكلية الموجودة ضمن سطح كاوس وبهذا نحصل على مقدار شدة المجال الكهربائي.

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad \ldots\ldots\ldots(22)$$

2- المجال بين صفيحتين موصلتين متوازيتين مشحونتين

استعمل قانون كاوس لإثبات أن شدة المجال الكهربائي في أية نقطة مثل p (الشكل 15) بين لوحين متوازيين مشحونين بشحنتين متساويتين في المقدار ومختلفتين في الإشارة المسافة بينهما صغيرة بالمقارنة مع بعديهما تساوي $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.



الشكل (15)

الحل:

طالما المسافة بين اللوحين صغيرة بالمقارنة مع بعديهما فيمكن إهمال تأثير الحافتين واعتبار المجال الكهربائي كلياً منتظماً بين اللوحين.إن أفضل سطح كاوسي نختاره لهذه المسألة هو شكل متوازي المستطيلات بحيث تكون أحدى قاعدتيه داخل اللوح الموجب والأخرى في الفراغ بين اللوحين. نقسِّم متوازي المستطيلات إلى أربعة أقسام وهي S_1 و S_2 و S_3 و S_4 ثم نطبِّق علاقة كاوس على كل هذه الأسطح لحساب E:

$$\oint_s E\cos\theta ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{s_1} E\cos\theta ds + \int_{s_2} E\cos\theta ds + \int_{s_3} E\cos\theta ds + \int_{s_4} E\cos\theta ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{s_1}(0)\cos 0 ds + \int_{s_2} E\cos 90 ds + \int_{s_3} E\cos 90 ds + \int_{s_4} E\cos 0 ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0} \quad 0+0+0+EA = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

الشحنة الكلية داخل سطح كاوس (متوازي المستطيلات) q_{tot} تساوي σA

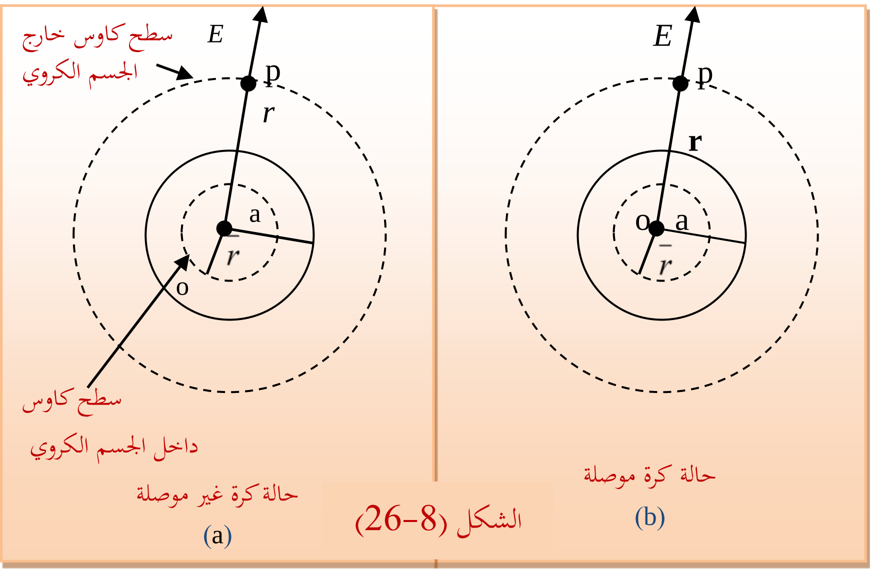
$$\therefore EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

والسؤال الذي يتبادر إلى الأذهان هو لماذا طبّق سطح كاوس على اللوح الموجب الشحنة وعدم الأخذ بنظر الاعتبار الشحنات السالبة على اللوح الأخر عند حساب E. ذلك أن هذه الشحنات سوف تؤثر على الشحنات الموجبة في اللوح الأخر وتجعلها تتجمع على سطح واحد فقط وهو السطح المقابل. وهنا لابد أن نذكر بأنه لو اخترنا سطح كاوس بحيث يقطع اللوح السالب بدل الموجب لحصلنا على النتائج نفسها.

مثال:

يبين الشكل (26a-8) جسماً كروياً غير موصل نصف قطره a ويحمل شحنة موجبة موزعة بصورة متجانسة. والشكل (8-26b) جسم كروي موصل نصف قطره a ويحمل شحنة موجبة مستقرة على سطحه الخارجي. والمطلوب إيجاد شدة المجال الكهربائي الناشئ عن الجسمين الكرويين في نقطة p تقع على مسافة r خارج الكرتين.



الشكل (8-26)

الحل:

إن أفضل سطح كاوسي نختاره لهذه المسألة ولكلتا الكرتين هو كرة نصف قطرها r بحيث تكون نقطة p المراد إيجاد شدة المجال الكهربائي عندها واقعة على هذا السطح.

1- في حالة الكرة غير الموصلة :

يطبق قانون كاوس المتمثل في المعادلة :

$$\oint_s E\cos\theta ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

واضح من التناظر ألشعاعي لشدة المجال الكهربائي إن E عمودية على كل نقطة من نقاط سطح كاوس وتكون لها نفس القيمة، ولهذا فان الزاوية θ وهي الزاوية المحصورة بين اتجاه E وعنصر المساحة ds تساوي صفراً، عندئذ :

$$E\oint_s ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$$ES = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0} \quad , \quad S = 4\pi r^2$$ (مساحة السطح الكروي لكاوس)

$$\therefore E4\pi r^2 = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

أو

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{tot}}{r^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(31\text{-}8)$$

وهي نفس النتيجة التي حصل عليها لشدة المجال الناشئ عن شحنة نقطية المعادلة (3-8) ومنها نستنتج أن شدة المجال الكهربائي في نقاط تقع خارج كرة مشحونة (غير موصلة) هي ذاتها كما لو كانت الشحنة متجمعة في مركز الكرة.

2- في حالة الكرة الموصلة:

المجال خارج كرة موصلة مشحونة يعطى بالمعادلة (31-8) طالما إن الشحنة باجمعها تبقى داخل سطح كاوس أيضاً وان E عمودي على كل نقطة من نقاط سطح كاوس بسبب التناظر ألشعاعي للمجال الذي يجعل θ تساوي صفراً .

مثال3 ص 112 : وضعت شحنة نقطية موجبة قدرها 10μC في مركز سطح كاوسي مكعب الشكل طول ضلعه 20cm احسب فيض المجال الكهربائي داخل هذا السطح المغلق ؟

مثال 4:
لوحان معدنيان يحملان شحنتين متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالإشارة المسافة بينهما 1cm. فإذا كان المجال الكهربائي المتكون في المنطقة بين اللوحين 50NC-1 ومساحة كل من اللوحين تساوي 100cm2. جد شحنة كل من اللوحين.

مثال 5: يمثل الشكل جسما عازلا بشكل كرة مجوفة نصف قطرها b ونصف قطر التجويف في داخلها a وقد وزعت الشحنة موجبة بشكل منتظم في جميع نقاطها بكثافة قدرها ρ بوحدات ($coul/m^3$) والمطلوب ايجاد شدة المجال الكهربائي بدلالة ρ عند النقاط التي تبعد مسافة قدرها r عن مركز الكرة حيث ان

أ) $r>b$

ب) $a<r<b$

تمارين الفصل الثاني

س3-1\ شحنة موجبة قدرها ($20x10^{-6}$ c) وضعت في مركزسطح كروي نصف قطره (10cm) احسب عدد خطوط القوة التي تنفذ خلال هذا السطح ؟

س3-2\ اذا علمت ان ثلاثة الاف من خطوط القوة تدخل سطحا مغلقا ويخرج منه الف خط . فما مقدار الشحنة الكلية التي يجب ان يحتضنها هذا السطح ؟ وهل هي موجة ام سالبة ؟

س3-3\ سطح كروي موصل نصف قطره R يحمل شحنة موجبة كثافتها السطحية σ. اوجد بواسطة قانون كاوس شدة المجال الكهربائي عند اي نقطة أ) خارج السطح الكروي ب) دخل السطح

س3-12\ اسطوانتان طويلتان متحدتان المحور . الاسطوانة الداخلية نصف قطرها a وتحمل شحنة موجبة قدرها (λ c\m) . اما السطوانة الخارجية فنصف قطرها b وتحمل شحنة سالبة بنفس المقدار . استخدم قانون كاوس لايجاد شدة المجال عند النقاط

1) $r<a$ 2) $r>b$ 3) $a<r<b$

س3-14\ : شحنة موجبة موزعة بشكل كرة نصف قطرها $3m$ بحيث ان كثافتها الحجمية عند أية نقطة داخل الكرة تعتمد على البعد r من مركزها حسب المعادلة : $\rho = 10^{-7} r \frac{C}{m^3}$. ما قيمة:1- الشحنة، 2- E عند نقطة تبعد $4m$ عن المركز، 3- ما مقدار E عند نقطة تبعد $2m$ عن المركز.

س\ افرض شحنة موجبة موزعة بصورة منتظمة خلال كرة نصف قطرها R وان كثافة الشحنة الحجمية هي ρ استعمل قانون كاوس لتبرهن ان المجال الكهربائي داخل الكرة على مسافة r من المركز يكون

$$E = \frac{\rho\, r}{3\epsilon_0}$$