

الفصل الرابع

الإحتمالات

1.4 الحساب التوافيقي

يعتبر المبدأ الأساسي للعد أمرًا بالغ الأهمية في عناصر نظرية الاحتمالات التي سوف نتطرق إليها في هذا الفصل، والذي ينص على أنه إذا كانت النتائج الممكنة لتجربة ما هي n والنتائج الممكنة لتجربة أخرى هي m فإن النتائج الممكنة للتجربتين معا هي: $n \cdot m$.

1.1.4 التباديل Permutations

تعريف 1.1.4: نسمي ترتيب n من العناصر المختلف بأنه تبديل هذه العناصر مأخوذة k في كل مرة، بشرط أن تؤخذ جميع العناصر أي $n = k$. هي عدد المجموعات التي يمكن تشكيلها من هذه العناصر التي تختلف باختلاف ترتيب أحد هذه العناصر على الأقل. ويعبر عنها بالعلامة التالية:

$$P_n = n!$$

بقرأ n عاملي.

نظراً لأنه يجب استخدام جميع عناصر المجموعة، فإن التجربة العشوائية تكون دائماً بدون إرجاع.

مثال 1: ما هو عدد الطرق الممكنة لترتيب مجموعة الحروف (a, b, c) ؟
من خلال العد المباشر نحصل على 6 طرق (a, b, c) ، (a, c, b) ، (b, a, c) ، (b, c, a) ، (c, a, b) ، (c, b, a) . كل

واحدة من هذه الترتيبات يعرف بالتبديلة. حيث أنه هناك 6 تبديلات مملّنة من مجموعة من 3 عناصر مختلفه.

ويمكن الحصول على هذه النتيجة أيضا من قاعدة المبدأ الأساسي للعد. حيث يتم اختيار الحرف الأول بثلاث طرق و يبقى لنا حرفين للاختيار الحرف الثاني، وحرف واحد للاختيار الحرف الثالث. يمكن التعبير عن ذلك

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

مثال 2 : ن سحب أربع كرات من كيس يحتوي على كرة حمراء (R) ، كرة زرقاء (B) ، كرة صفراء (J) و كرة خضراء (V). النتائج المحتملة هي:

$$\begin{aligned} &(R, B, J, V), (R, B, V, J), (R, J, B, V), (R, J, V, B), (R, V, B, J), (R, V, J, B), \\ &(B, R, J, V), (B, R, V, J), (B, J, R, V), (B, J, V, R), (B, V, R, J), (B, V, J, R), \\ &(J, R, B, V), (J, R, V, B), (J, B, R, V), (J, B, V, R), (J, V, R, B), (J, V, B, R), \\ &(V, R, B, J), (V, R, J, B), (V, B, R, J), (V, B, J, R), (V, J, R, B), (V, J, B, R). \end{aligned}$$

لذلك هناك 24 تبديلة محتملة لهذه المجموعة.

لتبسيط حساب التباديل المحتملة ، يكفي ضرب عدد العناصر المملّنة لكل فرعه. في هذه الحالة سوف يكون الحساب كالآتي

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24.$$

2.1.4 الترتيبية Arrangement

تعريف 2.1.4 : الترتيبية هي ترتيب مجموعة جزئية لعدد من عناصر مجموعة ما.

يتميز ترتيبان من نفس المجموعة بمرتبة ترتيب عناصرها. على سبيل المثال، إذا كان لدينا مجموعة تحتوي على الحروف (A, B, C) ، فإننا نجد الترتيبات التالية (A, B) و (B, A) بين جميع الترتيبات الممكنة للمجموعة. يختلف حساب عدد الترتيبات الممكنة اعتماداً على ما إذا كانت تجربة بإرجاع أم لا.

في حالة تجربة بدون إرجاع، يتم حساب عدد الترتيبات الممكنة باستخدام الصيغة التالية:

$$A_n = \frac{n!}{(n - k)!}$$

حيث يمثل n عدد العناصر في المجموعة ويمثل k عدد عناصر المجموعة التي تم إختيارها كمجموعة جزئية.

مثال 3 : نقوم باختيار حرفين عشوائياً من المجموعة (D, E, F, G) ، إذا تم إجراء التجربة العشوائية دون إرجاع، فهناك 4 عناصر ممكنة للسحب الأول و 3 عناصر ممكنة للسحب الثاني. الترتيبات الممكنة لذلك هم كالتالي:

$$\begin{aligned} &(D, E), (D, F), (D, G), \\ &(E, D), (E, F), (E, G), \\ &(F, D), (F, E), (F, G), \\ &(G, D), (G, E), (G, F). \end{aligned}$$

لذلك هناك ما مجموعه 12 نتيجة محتملة.

بمكنا نبسبب تعداد النتائج المحتملة بواسطة ضرب عدد العناصر الممكنة لكل حالة:

$$12 \text{ ترتيبه ممكنه} = 4 \cdot 3$$

باستخدام الصيغة أعلاه

$$A_n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

حيث $n = 4$ و $k = 2$ ، فإننا نقوم بالحساب التالي:

$$A_4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12 \text{ ترتيبه ممكنه}$$

في حالة السحب بإرجاع، يتم حساب عدد الترتيبات الممكنة باستخدام الصيغة التالية:

$$n^k = \text{عدد الترتيبات الممكنة}$$

حيث يمثل n عدد العناصر في المجموعة ويمثل k عدد العناصر للمجموعة الجزئية المختارة.

مثال 4 : نقوم باختيار حرفين عشوائياً من المجموعة (D, E, F, G) . إذا تم السحب عشوائياً مع الإرجاع، فهناك 4 عناصر محتملة للسحب الأول و 4 عناصر محتملة للسحب الثاني. الترتيبات الممكنة هي كما يلي:

$$\begin{aligned} &(D, D), (D, E), (D, F), (D, G), \\ &(E, D), (E, E), (E, F), (E, G), \\ &(F, D), (F, E), (F, F), (F, G), \\ &(G, D), (G, E), (G, F), (G, G). \end{aligned}$$

لذلك هناك ما مجموعه 16 نتيجة محتملة.
بمكنا نبسب حساب النتائج المحتملة بضرب عدد العناصر الممكنة لكل سحب:

$$A_4 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ نرئبئ مملئئ}$$

بانواع الصبغء أءلاه ءبء $n = 4$ و $k = 2$ ، نءء:

$$n^k = 4^2 = 16 \text{ نرئبئ المملئئ}$$

3.1.4. التوفيقات Combinations

تعريف 3.1.4 : نوبفئء مءموءء من العناصر هو نرئب غير منظم لعدد من عناصر نلك المءموءء. توفيقء مءموءء ما تتوافق مع مءموءء ءزئبء من العناصر غير المرئبء في المءموءء. يتم ءءءءء عدد المءموءءات المءمءلة لئءربة عشوائبء ءون إءءاء على النحو الآلب:

$$\text{عدد الترتيبات الممكنة} = \frac{\text{عدد التباديل الممكنة في هذا الترتيب}}{\text{عدد المجموعات الممكنة}}$$

و نكتب

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ءبء يمثل n عدد العناصر الممكنة في المءموءء ويمثل k عدد العناصر المءءءة في المءموءء المءءارة.

مءال 5 : بنم سحب نلائ ءراء بشكلا عشوائب من ءبس بءئوب على ءرة ءمراء (R) ، ءرة زرفاء (B) ، ءرة صفراء (J) و ءرة ءضراء (V) . بنم نءربء عدد المءموءءات الممكنة باسئءرام الصبغء أءلاه.

$$\text{عدد المءموءءات الممكنة} = C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{24}{6} = 4$$

مع الأء بعءن الاءءبار النرئب ، هناك 24 نرئبب مملئئ:

$$\begin{aligned} &(R, B, J), (R, B, V), (R, J, B), (R, J, V), (R, V, B), (R, V, J), \\ &(B, R, J), (B, R, V), (B, J, R), (B, J, V), (B, V, R), (B, V, J), \\ &(J, R, B), (J, R, V), (J, B, R), (J, B, V), (J, V, R), (J, V, B), \\ &(V, R, B), (V, R, J), (V, B, R), (V, B, J), (V, J, R), (V, J, B). \end{aligned}$$

باستخدام الألوان ، نجد أن هناك 6 طرق مختلفة لاختيار ثلاثة أحجار ملونة إذا أخذنا في الاعتبار الترتيب. هذا يتوافق مع عدد التباديل المحتملة.

عدد المجموعات المحتملة هو 4، وبالتالي فإن هذه المجموعات هي كما يلي:

$$(R, B, J), (R, B, V), (J, B, V), (J, V, R).$$

يمكن أن نحسب عدد المجموعات باستخدام الصيغة أعلاه حيث $n = 4$ و $k = 3$

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{24}{6} = 4$$

في حالة إجراء تجربة عشوائية مع الإرجاع ، يتم حساب عدد المجموعات المحتملة باستخدام الصيغة التالية:

$$\text{عدد المجموعات الممكنة} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

حيث يمثل n عدد العناصر في المجموعة ويمثل k عدد العناصر المحددة في المجموعة المختارة في السحب.

مثال 6 : يتم سحب ثلاث كرات بشكل عشوائي من جرة تحتوي على كرة حمراء ، واثنين من الكرات الزرقاء المنفصلة وأربع كرات خضراء منفصلة. نريد تحديد عدد التوليفات الممكنة في حالة إجراء سحب مع الإرجاع.

هنا ، $n = 7$ و $k = 3$.

باستخدام الصيغة أعلاه ، نقوم بإجراء الحساب التالي:

$$\text{عدد المجموعات الممكنة} = \frac{(7+3-1)!}{3!(7-1)!} = \frac{9}{3! \cdot 6!} = 84.$$

2.4 خواص التوفيقات

1.2.4 التناظر

عدد المجموعات ذات k عنصر و المأخوذة من مجموعة ذات n عنصر هو :

$$C_n^{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

و منه لدينا الخواص التالية:

1 -

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

لأن

$$C_n^0 = C_n^n = \frac{n!}{n!} = 1$$

2 - من أجل $n \geq 1$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

3 - من أجل $n \geq 2$

$$C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

و بالتراجع نجد من أجل $n \geq k$:

$$C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.2.4. توفيقات مركبة أو صيغة باسكال

من بين n عنصر، نأخذ عنصرا معينا.

• إذا كان هذا العنصر هو أحد العناصر k المختارة، فهناك C_{n-1}^{k-1} احتمال لاختيار $k-1$ عنصر آخر من بين $n-1$ عنصر متبقية.

• إذا لم يكن هذا العنصر من بين الإختيارات، من ناحية أخرى، جزءا من السحب، فهناك C_{n-1}^k احتمال لاختيار العناصر الأخرى من بين الـ $n-1$ العناصر المتبقية.

منها تحصلنا على العلاقة التالية

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$$

تنتج شروط مثلث باسكال من التطبيق المباشر لهذه العلاقة.

| | | | | | | | |
|-----|---|---|----|-----|----|---|---|
| n | | | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | | | | k | | | |

لإنشاء مثلث باسكال ، يكفي حمل القيم المأخوذة من العمود k والقيم المأخوذة من السطر n (انظر الجدول أعلاه). يتم الحصول على القيمة المخصصة لكل مربع أو خانة، وذلك عن طريق جمع قيمة المربع الموجود أعلاه مباشرة، وقيمة المربع الموجود أعلاه إلى اليسار. هذا يتوافق مع تطبيق الخواص المذكورة أعلاه.

ملاحظة 1 : بسمح مثلث باسكال بالحصول على المعاملات العددية أو المعامل ذات الحدين لتنائي نبونن عن طريق صبغة تراجعية.

3.2.4 صيغة نيوتن ذات الحدين Binôme de Newton

نظرية ذات الحدين أو ما يسمى ثنائي الحد لنيوتن la formule du binôme de Newton هي صيغة وضعها نيوتن لإيجاد نشر لثنائي الحد مرفوع بقوة صحيحة ما. ويطلق على هذه الصيغة صيغة ثنائي الحد لنيوتن.

تعريف 1.2.4 : من أجل $n \in \mathbb{N}$ و من أجل كل عدد x و y لدينا:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k$$

نسمي C_n^k المعاملات ذات الحدين أو معاملات نبونن، بملن الحصول على هذه المعاملات بسهولة باستخدام مثلث باسكال.

مثال 1 : نحلل العدد $(x + y)^3$ بعطبتنا:

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= \sum_{k=0}^3 C_3^k x^{3-k} y^k \\ &= C_3^0 x^3 y^0 + C_3^1 x^2 y + C_3^2 x y^2 + C_3^3 x^0 y^3 \\ &= 1x^3 y^0 + 3x^2 y + 3x y^2 + 1x^0 y^3 \\ &= x^3 + 3x^2 y + 3x y^2 + y^3. \end{aligned}$$

ملاحظة 2 : بوضع $x = y = 1$ نجد مجموع معاملات نيوتن على الشكل التالي

$$2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$$

C_n^k يمثل عدد عناصر مجموعة جزئية تحتوي على k عنصر من المجموعة E ذات n عنصر. ومنه مجموع عناصر المجموعات أجزاء المجموعة ذات n عنصر هو 2^n .

3.4 فضاء الأحداث الابتدائية

1.3.4 أنواع الأحداث

تعريف 1.3.4 : الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء النتائج المحتملة لتجربة عشوائية. نسمى العناصر التي تنتمي إلى هذه المجموعة الجزئية : النتائج (أو الحالات) المواتية لتخفيف الحدث.

خلال تجربة عشوائية ، يمكننا في بعض الأحيان تقديم تنبؤ، يعني تنبؤ يحدث في المستقبل و غير معروف ، لكن لديه فرصة حدوث ذلك. خلال هذا الحدث ، سنكون قادرين على الحصول على نتائج معينة بين جميع النتائج المحتملة.

مثال 1 : إذا قمنا برمي نرد من سنة أوجه مرفمة من 1 إلى 6 ، بملأن أن يحدث العديد من الأحداث. فضاء النتائج المحتملة هو

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

| النائج المحتملة للأحداث | مثال للأحداث |
|-------------------------|------------------------------|
| $A = \{5\}$ | نحصل على 5 : A |
| $B = \{1, 3, 5\}$ | نحصل على عدد فردي : B |
| $C = \{5, 6\}$ | نحصل على عدد أكبر من 4 : C |
| $D = \{2, 3, 5\}$ | نحصل على عدد أولي : D |

يمكن أن يتوافق الحدث مع نتيجة واحدة أو نتائج متعددة أو جميع نتائج فضاء الإحتمالات. كما قد لا تتوافق مع أي نتيجة. هناك بالتالي أنواع مختلفة من الأحداث.

2.3.4. الحدث الابتدائي

تعريف 2.3.4 : يكون الحدث ابتدائي إذا كان يحتوي على نتيجة واحدة فقط من مجموعة أو فضاء الاحتمالات. وتسمى النتيجة التي تشكل الحدث الابتدائي المفردة *Singleton*.

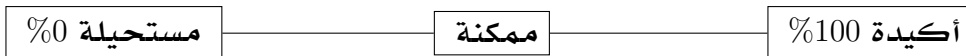
مثال 2 : 1- نفوم بسحب ورقه من مجموعة من 52 ورقه. الحدث *obtenir l'as de coeur* حدثا ابتدائيا لأنه يحتوي على نتيجة واحدة فقط من مجموعة الاحتمالات. احتمال هذا الحدث هو $1/52$.

2- الحدث (الحصول على الرقم 3) عند رمي النرد هو حدث ابتدائي لأنه يحتوي على نتيجة واحدة فقط من مجموعة الاحتمالات. احتمال هذا الحدث هو $1/6$.

ملاحظة 1 : مجموع الاحتمالات لجميع الأحداث الأولية للنزيرة العشوائية يساوي 1.

3.3.4. أحداث أكيدة، ممكن و مستحيل

يمكننا توضيح بعض الأحداث المحتملة والمستحيلة على خط الاحتمالات. على هذا الخط ، كلما كانت النتيجة موجودة على اليسار ، قل احتمال حدوثها.



مثال 3 : النتائج المرتبطة بتجربة رمي نرد



تعريف 3.3.4 : الحدث الأكيد *événement certain* هو الحدث الذي يحدث دائماً. وهو يتوافق مع مجموعة النتائج المحتملة. احتمال حدوث هذا الحدث هو 1 أو 100%.

مثال 4 : الحدث (الحصول على رقم يتراوح بين 1 و 6) عندما نقوم برمي نرد هو حدث أكيد، لأن الحدث يتوافق مع مجموعة من النتائج المحتملة و احتمال هذا الحدث هو: $6/6 = 1$.

تعريف 4.3.4 : الحدث المحتمل *événement possible* هو الحدث الذي يمكن أن يحدث. نقول أيضاً الحدث المحتمل. يتراوح احتمال حدوث هذا الحدث بين 0 و 1، حيث يتم استبعاد هذين الطرفين.

مثال 5 : الحدث (الحصول على رقم زوجي) عندما نقوم برمي نرد هو حدث محتمل وممكن، لأن الحدث يتوافق مع مجموعة جزئية غير فارغة من فضاء الاحتمالات ($A = \{2, 4, 6\}$). احتمال حدوث هذا الحدث هو: $3/6 = 1/2$.

تعريف 5.3.4 : الحدث المستحيل *événement impossible* هو حدث الذي لن يحدث أبداً، ومن المؤكد أنه لن يحدث. احتمالية وقوع حدث مستحيل هي دائماً 0.

مثال 6 : الحدث (الحصول على رقم 7) عندما نقوم برمي نرد من ستة جوانب حدثاً مستحيلًا لأن الرقم 7 ليس جزءاً من مجموعة النتائج المحتملة. احتمال هذا الحدث هو 0.

4.3.4 Événements complémentaires أحداث تكملية

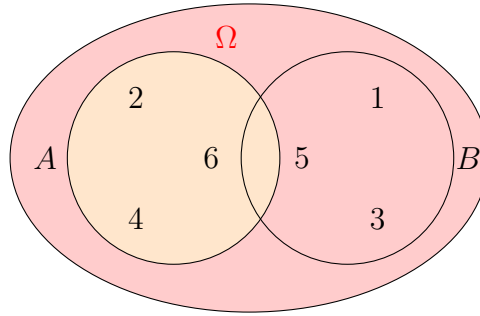
تعريف 6.3.4 : نلّون الأحداث $(A$ و $B)$ متكاملتة *complémentaires* عندما نلّون غير متوافقين وعندما يتوافق مزيج نتائجها مع فضاء النتائج المحتملة.

لكي يكون الحدثان متكاملان ، يجب أن يكون تقاطعهما فارغاً $(A \cap B = \phi)$ وأن يكون اتحاد مجموعتي نتائجهما مساويا لفضاء النتائج المحتملة $(A \cup B = \Omega)$.
يقابل احتمال الحدثين المتكاملين $(A$ و $B)$ مجموع احتمالات كل حدث. هذا المجموع يساوي 1.

$$P(A) + P(B) = 1$$

نرمز للحدث المكمل للحدث A بالرمز \bar{A} أو \bar{A} .

مثال 7 : الحدث A (الحصول على رقم زوجي) والحدث B (الحصول على رقم فردي) عندما نرمي نرد ذو ستة جوانب عبارة عن أحداث متكاملة لأن مزيج نتائجها يتوافق مع مجموعة كل النتائج المحتملة.

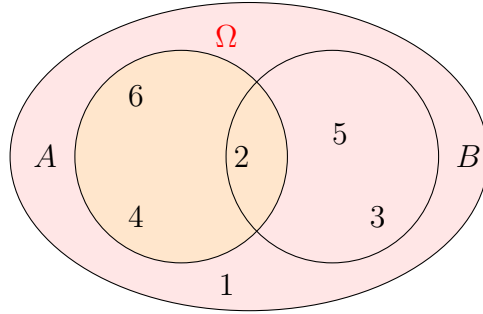


5.3.4 أحداث متنافية و غير متنافية

تعريف 7.3.4 : نقول أن الحدثان $(A$ و $B)$ متنافيان *Compatibles* إذا كان لديهم عنصر واحد على الأقل من العناصر المشتركة. $(A \cap B \neq \phi)$

و نلّون الحدثان غير متنافيين *Incompatibles* عندما لا يكون هناك شيء مشترك بينهما. أي أن التقاطع بين الأحداث غير المتنافية فارغ. $(A \cap B = \phi)$

مثال 8 : الحدث A (الحصول على الرقم 2، 4 أو 6) والحدث B (الحصول على الرقم 2، 3 أو 5) عندما نرمي نرد ذوستة جوانب هما حدثان متنافيان لأنه من الممكن الحصول على 2 خلال الحدثين $A \cap B = \{2\}$.



الحدث A (الحصول على الرقم 2، 4 أو 6) والحدث B (الحصول على الرقم 5) عندما نرمي نرد ذوستة جوانب هما حدثان غير متنافيان لأنهما لا يتقاطعان.

