التمرين 2:

$$I_3=\int_0^1 \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)dx = ??$$

باستعمال تحويل المتغير: $y^2=\frac{x+1}{x+2}$ نجد $\Rightarrow (x+2)y^2=x+1$

أول خطوة: عبارة $x$

$$\Rightarrow xy^2+2y^2=x+1$$
$$\Rightarrow x(y^2-1)=1-2y^2 \Rightarrow \boxed{x=\frac{2y^2-1}{1-y^2}}$$

ثاني خطوة: عبارة $dx$:

$$dx=\frac{(2y^2-1)'(1-y^2)-(1-y^2)'(2y^2-1)}{(1-y^2)^2}dy$$

بعد التبسيط

$$=\frac{2y}{(1-y^2)^2}dy \Rightarrow \boxed{dx=\frac{2y}{(1-y^2)^2}dy}$$

ثالث خطوة: تغيير حدود التكامل:

$$x=0 \Rightarrow y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$x=1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

نعوض العبارات في التكامل إذن:

$$I_3=\int_0^1 \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)dx=\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/\sqrt{3}} \arctan(y)\cdot\frac{2y}{(1-y^2)^2}dy$$

$$y^2=\frac{x+1}{x+2}$$

$$=\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/\sqrt{3}} \frac{2y}{(1-y^2)^2}\cdot\arctan(y)\,dy$$

الحل الموجود لديكم يحوي طريقة حل التكامل (التكامل بالتجزئة). هناك بعض التوضيحات:

$$v'=\frac{2y}{(1-y^2)^2} \Longrightarrow v=\frac{1}{(1-y^2)}$$

لأن لدينا:

$$\int \frac{f'}{f^2} = -\frac{1}{f} + c$$

اذن:

$$v = \int \frac{2y}{(1-y^2)^2} = -\int \frac{-2y}{((1-y^2))^2} = -\left[-\frac{1}{f} + c\right]$$

$$= \frac{1}{f} + c = \frac{1}{1-y^2} + c$$

ومنه:

$$I_0 = \left[\arctan(y) \cdot \frac{1}{1-y^2}\right]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/3} - \underbrace{\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{(1+y^2)} \cdot \frac{1}{1-y^2}\, dy}_{\text{تكامل دالة ناطقة}}$$

$$= \int \left(\frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{1+y}\right) dy$$

$$= \int \left(\frac{ax+b}{1+y^2} + \frac{c}{1-y} + \frac{d}{1+y}\right) dy$$

~~[illegible]~~ أكملوا الحل بايجاد قيم: a, b, c, d بالمطابقة ولا تنسوا التعويض لحدود التكامل.

ملاحظة: هناك خطأ مطبعي في التكامل بالتجزئة في مطبوعة الحلول الموجودة لديكم وقد قمنا بتصحيح هذا الخطأ في هذا الحل.

## التمرين 3: السؤال 1

الهدف من السؤال 1 هو حساب مشتقات التكامل بالنسبة لحدود التكامل باستعمال القاعدة التالية

ليكن $f(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} R(t)\,dt$ حيث H هي الدالة الأصلية لـ R معناه: $H' = R$ . إذن:

$f(x) = H(\psi(x)) - H(\varphi(x)) \leftarrow$ عوضنا حدود التكامل $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ في الدالة الأصلية H

$$\Rightarrow f'(x) = \big(H(\psi(x))\big)' - \big(H(\varphi(x))\big)'$$

مشتق مركب دالتين

$$= H'(\psi(x)).\psi'(x) - H'(\varphi(x)).\varphi'(x)$$

هذه الطريقة تسهل علينا حساب مشتقات التكامل دون اللجوء لحساب تكامل الدالة ثم نشتقها و بالتالي نشتق التكامل دون معرفة قيمة تكامل الدالة.

نطبق القاعدة على التكامل

$$f(x) = \int_{\underset{\varphi(x)}{-x}}^{\overset{\psi(x)}{x}} \underbrace{\frac{e^{5t}}{3t}}_{R(t)}\,dt$$

إذن، نبحث عن $f'(x)$ معناه:

$$f'(x) = H'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) - H'(f(x))\cdot f'(x)$$

لدينا : $H'(t)=h(t)=\frac{e^{5t}}{3t}$ ، $\varphi(x)=x$ ، $f(x)=-x$ إذن

نعوض في القانون :

$$f'(x) = \underbrace{H'(x)}\cdot\underbrace{(x)'} - \underbrace{H'(-x)}\cdot\underbrace{(-x)'}$$

$$= \frac{e^{5x}}{3x}\cdot 1 - \frac{e^{-5x}}{3(-x)}\cdot(-1) = \boxed{\frac{e^{5x}}{3x} - \frac{e^{-5x}}{3x}}$$

بنفس الطريقة التكامل الثاني.

السؤال 2 : تحويل حدود التكامل الى حدود جديدة بين 0 و 1 .

نستعمل تحويل المتغير $x = a+(b-a)t$ ، إذن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)\,dt$$

بالنسبة للتكامل :

$$\int_{a\;-1}^{b\;3}(\underbrace{3x^2+2x-1}_{f(x)})\,dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)\,dt$$

$$= (3-(-1))\int_0^1 f(-1+(3-(-1))t)\,dt$$

$$= 4\int_0^1 f(-1+4t)\,dt$$

$f(x) = 3x^2+2x-1$

$$= 4\int_0^1\left[3(-1+4t)^2+2(-1+4t)-1\right]dt$$

بنفس الطريقة التكامل الثاني.