Chapitre 1

Développements en série de Taylor et en série de Laurent

1.1 Développement en série de Taylor.

Définition 1.1.1 *Soit f une fonction complexe définie sur un ouvert connexe D de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.*

On dit que f admet un développement en série de Taylor au voisinage de z_0, s'il existe une série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ dans un voisinage V de z_0, convergente et telle que f s'écrit pour tout $z \in V$,

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n.$$

Remarque 1.1.1 *Soit $D_r(z_0)$ un disque sur lequel f admet le développement ci-dessus. La série converge absolument dans $D_r(z_0)$ et converge uniformément sur tout disque fermé $\overline{D}_\varrho(z_0)$, $\varrho < r$. Le rayon de convergence de la série est bien sûre $\geq r$.*

Proposition 1.1.1 *Soit $\{f_n, n \geq 1\}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert D de $\mathbb{C}$.*

Si $\{f_n, n \geq 1\}$ converge vers une fonction f dans D, et si cette convergence est uniforme sur toute partie compacte de D, alors f est holomorphe sur D, et de plus pour tout $p \geq 1$ on a $f_n^{(p)}(z) \longrightarrow f^{(p)}(z), n \longrightarrow +\infty$, sur D et la convergence est uniforme sur toute partie compacte de D.

Preuve. Soit $z_0 \in D$ et $D_r(z_0)$ un disque ouvert tel que son adhérence $\overline{D}_r(z_0)$ est contenue dans D, et soit γ le bord orienté de $\overline{D}_r(z_0)$. On a en appliquant la formule intégrale de Cauchy sur le disque $D_r(z_0)$,

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f_n(u)}{u-z}du, \qquad \forall n \geq 1 \quad \text{et} \quad \forall z \in \overline{D}_r(z_0).$$

Comme $\{\gamma\}$est compacte et que la partie $\{|u-z|\,,\ u\in\gamma,\ z\in D_r(z_0)\}$ est bornée, il s'ensuit que,

$$\frac{f_n(u)}{u-z} \longrightarrow \frac{f(u)}{u-z}, \qquad n \longrightarrow +\infty$$

uniformément sur $\{\gamma\}$. En prenant la limite de $f_n(z)$ et sachant que l'on peut intervertir la limite et le signe intégrale d'après ce qui précède, on obtient alors,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(u)}{u-z} du.$$

Ceci exprime que f est holomorphe dans le disque $D_r(z_0)$ et comme z_0 est quelconque, f est alors holomorphe dans D. D'autre part, pour tout $p \geq 1$, $f_n^{(p)}(z)$ satisfait la formule intégrale,

$$f_n^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(u)}{(u-z)^{p+1}} du$$

et donc,

$$f_n^{(p)}(z) - \quad f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(u) - f(u)}{(u-z)^{p+1}} du.$$

Si $z \in \overline{D}_r(z_0)$, $r_1 < r_2$, alors

$$\left| f_n^{(p)}(z) - \quad f^{(p)}(z) \right| \leq \frac{p! r}{(r-r_1)^{p+1}} \sup \left\{ |f_n(u) - f(u)| \,, \ u \in \gamma \right\} \longrightarrow 0, \qquad n \longrightarrow +\infty$$

Soit $f_n^{(p)}(z) \longrightarrow f^{(p)}(z)$, $n \longrightarrow +\infty$, et la convergence est uniforme sur tout disque fermé $\overline{D}_\varrho(z_0)$ strictement contenu dans le disque $D_r(z_0)$ et par suite la convergence est uniforme sur toute partie compacte de D. ∎

Théorème 1.1.1 *Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction complexe définie sur D. Si f admet un développement en série de Taylor dans D, alors f est holomorphe dans D.*

Si f admet le développement en série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ pour $z \in D_r(z)$, alors

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n (z-z_0)^{n-1} \quad \forall z \in D_r(z).$$

Preuve. Pour tout $n \geq 0$, les $f_n(z) = \sum\limits_{0\leq j\leq n} a_j(z-z_0)^j$, définissent une suite de fonctions holomorphes sur D et convergeant dans D vers la la fonction f et cette convergence est uniforme sur tout compact de D. L'holomorphie de f en résulte alors en vertu de la proposition ci-dessus et la relation résulte, du fait que la suite f_n' converge elle aussi uniformément vers f' sur toute partie compacte de D, alors la série f' est obtenue par dérivation terme à terme de la série f. ■

Remarque 1.1.2 *Si une fonction f admet un développement en série entière dans un voisinage de z_0, elle est holomorphe dans ce voisinage et est donc indéfiniment dérivable et ses dérivées successives admettent elles aussi un développement en série en tout point de ce voisinage,*

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n\geq p} n(n-1)...(n-p+1)a_n(z-z_0)^{p-n} \qquad (*)$$

d'où,

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Les séries $(*)$ ont même rayon de convergence que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$.
Par exemple pour $p = 1$, ceci vient de ce que

$$\lim_n \sup \sup \sqrt[n]{n\,|a_n|} = \lim_n \sup \sup \sqrt[n]{|a_n|} \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup \sqrt[n]{n} = \lim_n \sup \sup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Corollaire 1.1.1 *Si f admet un développement en série de Taylor, ce développement est unique.*

Preuve. Conséquence de la relation $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. ■

Théorème 1.1.2 *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe D. Alors f est développable en série entière au voisinage de tout point de D.*

Preuve. Soit $z_0 \in D$ et soit $D_r(z_0)$ le plus grand disque ouvert contenu dans D, $r > 0$ puisque D est ouvert. Choisissons ϱ tel que $0 < \varrho < r$ et soit γ le bord orienté du disque $D_r(z_0)$. On a en appliquant la formule intégrale de Cauchy sur le disque $D_r(z_0)$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(u)}{u - z} du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(u)}{(u - z_0)} \frac{1}{1 - (\frac{z - z_0}{u - z_0})} du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \sum_{n \geq 0} f(u) \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}} du. \end{aligned}$$

Si $z \in D_\varrho(z_0)$ $(0 < \varrho < r)$ et si $M = \sup\limits_{u \in \gamma} |f(u)|$, alors on a,

$$\left| f(u) \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}} \right| \leq (\frac{M}{r})(\frac{\varrho}{r})^n.$$

La série $\sum\limits_{n \geq 0} (\frac{M}{r})(\frac{\varrho}{r})^n$ est convergente et, par suite, la série $\sum\limits_{n \geq 0} f(u) \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}}$ est normalement convergente sur γ. Par conséquent, on peut intégrer terme à terme l'intégrale ci-dessus. On obtient,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(u)}{u - z} du \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du \right) (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

■

Remarque 1.1.3 - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$.
- Toute fonction analytique en un point z_0, donc holomorphe dans un voisinage de z_0, peut-être identifiée à une série entière au voisinage de z_0. Ceci fait souvent prendre pour définition d'une fonction analytique en un point z_0, une fonction développable en série entière au voisinage de ce point.

Définition 1.1.2 *Si $z_0 \in \mathbb{C}$ et si f est une fonction analytique définie sur un voisinage de z_0.*
On dit que z_0 est un zéro de f si et seulement si $f(z_0) = 0$. z_0 est dit zéro d'ordre p de f si $f^{(n)}(z_0) = 0$, $0 \leq n \leq p-1$ et $f^{(p)}(z_0) \neq 0$. Un zéro d'ordre 1 est dit zéro simple. L'entier p est appelé l'ordre de multiplicité du zéro z_0.

Définition 1.1.3 *Soit f une fonction analytique dans un ouvert D. Un zéro z_0 de f est dit isolé, s'il existe un voisinage V de z_0 tel que f est sans zéro dans l'ouvert $V - \{z_0\}$.*

Proposition 1.1.2 *Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique sur D. Si f n'est pas identiquement nulle sur D, les zéros de f sont isolés.*

Preuve. Soit z_0 un zéro de f et supposons que f ne soit pas identiquement nulle au voisinage de z_0.Soit p l'ordre de multiplicité de z_0. Dans un voisinage U de z_0, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \\ &= (z-z_0)^p \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{(n-p)}. \end{aligned}$$

Pour $z \in U$, posons,

$$g(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-p}.$$

La fonction g est continue sur U et on a $g(z) = \frac{f^{(p)}(z)}{p!} \neq 0$, $(n = p)$, il existe alors un voisinage V de z_0 à l'intérieur duquel $g(z) \neq 0$. Par suite à l'intérieur de V, z_0 est le seul zéro de f. ■

1.2 Développement en série de Laurent.

Définition 1.2.1 *On appelle série de Laurent au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$, une série de la forme,*

$$\sum_{-\infty \leq n \leq +\infty} a_n(z - z_0)^n$$

où la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes sont les coefficients de la série.

On dit que la série de Laurent converge si et seulement si chacune des deux séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ et $\sum\limits_{n>0} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ converge. Dans ce cas, la série de Laurent s'écrit,

$$\sum_{-\infty \leq n \leq +\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n>0} a_{-n}(z - z_0)^{-n}.$$

Si R_1 désigne le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ et $\frac{1}{R_2}$ le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n>0} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$, alors la série de Laurent converge en chaque point de la couronne,

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \ R_2 < |z - z_0| < R_1\}$$

où $0 \leq R_2 \leq R_1 \leq +\infty \quad (R_2 = 0 \Longrightarrow \frac{1}{R_2} = +\infty)$.

La couronne Δ s'appelle couronne de convergence de la série de Laurent.

Si on pose

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n \qquad \textit{pour} \quad |z-z_0| < R_1$$

$$f_2(z) = \sum_{n>0} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \qquad \textit{pour} \quad |z-z_0| > R_2$$

et

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \qquad \textit{pour} \quad z \in \Delta.$$

Alors f est une fonction holomorphe dans Δ et

$$\forall z \in \Delta, \quad f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

car f_1 est holomorphe dans le disque ouvert $D(z_0, R_1)$ et f_2 est holomorphe pour tout z tel que $|z-z_0| > R_2$.

Exercise 1 *-Montrer qu'une couronne Δ est connexe (connexe par arcs). N'est pas simplement connexe.*
($\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} \neq 0$, où γest le cercle $C(O,R)$ tel que $R_2 < R < R_1$).
-Deux chemins fermés γ_1 et $\gamma_2$dans cette couronne sont homotopes.
($\varphi(t,s) = (1-s)\gamma_1(t) + s\gamma_2(t)$ est une homotopie de $[0,1]^2$ dans Δ).

Définition 1.2.2 *Soit f une fonction complexe définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant la couronne Δ.*
On dit que f est développable en série de Laurent dans Δ, s'il existe une série de Laurent $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ convergente dans Δ dont la somme coincide avec f en tout point de Δ.

Proposition 1.2.1 *Si une fonction à valeurs complexes f possède un développement de Laurent dans une couronne Δ, ce développement est unique.*

Preuve. Supposons que pour tout nombre complexe z tel que $R_2 < |z - z_0| < R_1$, on ait,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Soit r un nombre réel tel que $R_2 < r < R_1$, alors on a pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$f(z_0 + re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}.$$

Les séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n r^n e^{in\theta}$et $\sum\limits_{n>0} a_{-n} r^{-n} e^{-in\theta}$sont normalement convergentes pour $\theta \in [0, 2\pi]$. On en déduit que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a,

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)\theta} d\theta.$$

Comme $\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-p)\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq p \\ 2\pi & \text{si} \quad n = p \end{cases}$, on a pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta = 2\pi a_p r^p.$$

Donc si f est développable en série de Laurent dans la couronne Δ et si r est un nombre réel tel que $R_2 < r < R_1$, les coefficients du développement de f sont entièrement déterminés et sont donnés par :

$$a_p = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta$$

Le développement est donc unique. ■

On sait que la somme d'une série de Laurent convergente dans la couronne Δ est holomorphe, donc si f est développable en série de Laurent dans Δ, elle est holomorphe dans Δ. La réciproque est donnée par le théorème11.

Théorème 1.2.1 *Si f est holomorphe dans Δ, alors f est développable en série de Laurent dans Δ.*

Preuve. Soient $r_1, r_2, \varrho_1, \varrho_2$ des nombres réels tels que

$R_2 < \varrho_1 < r_2 < r_1 < \varrho_1 < R_1$.

Notons par γ_1(res.γ_2) le bord orienté du disque $D_{\varrho_1}(z_0)$(res.$D_{\varrho_2}(z_0)$).

Appliquons la formule intégrale de Cauchy à l'ensemble K défini par :

$$K = \{z \in \mathbb{C} \; / \quad \varrho_1 \leq |z - z_0| \leq \varrho_2\}$$

dont le bord orienté ∂K est la réunion de $\gamma_1$et de $(-\gamma_2$). On a alors,

pour tout z vérifiant $\quad r_2 \leq |z - z_0| \leq r_1$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(u)}{u - z} du - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(u)}{u - z} du.$$

Si $u \in \gamma_1$, on a $|u - z_0| = \varrho_1$, donc si $u \in \gamma_1$ et si $\; r_2 \leq |z - z_0| \leq r_1$, on a

$$\left| \frac{z - z_0}{u - z_0} \right| \leq \frac{r_1}{\varrho_1} < 1.$$

Pour z fixé tel que $\; r_2 \leq |z - z_0| \leq r_1$, la série $\sum\limits_{n \geq 0} (\frac{z - z_0}{u - z_0})^n$ est normalement convergente sur γ_1 ; on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{u - z} &= \frac{1}{(u - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{(u - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{u - z_0})} \\ &= \frac{1}{(u - z_0)} \sum_{n \geq 0} (\frac{z - z_0}{u - z_0})^n. \end{aligned}$$

On en déduit que,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f(u)}{u-z}du = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}(\sum_{n\geq 0}\frac{(z-z_0)^n f(u)}{(u-z_0)^{n+1}})du.$$

D'autre part, pour $u \in \gamma_2$ et $r_2 \leq |z-z_0| \leq r_1$, on a $\left|\frac{u-z_0}{z-z_0}\right| \leq \frac{\varrho_2}{r_2} < 1$ et, par suite,

$$\begin{aligned}\frac{1}{u-z} &= \frac{1}{(u-z_0)-(z-z_0)}\\ &= -\frac{1}{(z-z_0)(1-\frac{u-z_0}{z-z_0})}\\ &= -\frac{1}{(z-z_0)}\sum_{n\geq 0}(\frac{u-z_0}{z-z_0})^n\\ &= -\sum_{n<0}\frac{(z-z_0)^n}{(u-z_0)^{n+1}}.\end{aligned}$$

En raison de la convergence normale de la série $\sum\limits_{n\geq 0}(\frac{z-z_0}{u-z_0})^n$ sur $\gamma_1$et de la série $\sum\limits_{n\geq 0}(\frac{u-z_0}{z-z_0})^n$ sur γ_2, on a pour z fixé tel que $r_2 \leq |z-z_0| \leq r_1$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f(u)}{u-z}du = \sum_{n\geq 0}(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}})du)(z-z_0)^n$$

et

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f(u)}{u-z}du = \sum_{n<0}(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}})du)(z-z_0)^n$$

donc en posant,

$$a_n = \begin{cases}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}})du & \text{si} \quad n\geq 0\\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}})du & \text{si} \quad n<0\end{cases}$$

on a :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

pour tout z de $\mathbb{C}$ vérifiant $r_2 \leq |z - z_0| \leq r_1$.

Nous avons donc montré qu'il existe une série de Laurent $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$

qui converge normalement en tout point de la couronne $r_2 \leq |z - z_0| \leq r_1$

et dont la somme est $f(z)$ en tout point de cette couronne. En raison de

l'unicité du développement en série de Laurent, la série obtenue ne dépend

pas des choix arbitraires des nombres $r_1$et r_2 assujettis à vérifier

$R_2 < r_2 < r_1 < R_1$.

Donc la série obtenue converge vers $f(z)$ en tout point de la couronne

$R_2 < |z - z_0| < R_1$, ce qui démontre le théorème. ■

Remarque 1.2.1 *Les coefficients a_n, $n \geq 0$, du développement de Laurent ne sont pas nécessairement de la forme $\frac{f^n(z_0)}{n!}$, car f n'est pas analytique dans un voisinage de z_0. On a,*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}})du, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

où γ est le cercle $D_r(z_0)$ avec $R_2 < r < R_1$(car γest homotope à $\gamma_1$et γ_2).

La couronne $\Delta_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 < |z - z_0| < r\}$est appelée le disque pointé en z_0. Si f est holomorphe dans $\Delta_r(z_0)$, on a $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \qquad \textit{inégalités de Cauchy}$$

où $M(r) = \sup\{|f(z)|, \quad |z - z_0| \leq r\}$.

1.3 Singularités isolées d'une fonction complexe.

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, z_0 un point de D et f une fonction holomorphe

sur $D - \{z_0\}$. Il existe un disque ouvert

$$D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \ |z - z_0| < R\} \subset D$$

et la restriction de f au disque pointé

$$\Delta_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \ 0 < |z - z_0| < R\} \text{ est holomorphe.}$$

On a le problème suivant : Peut-on prolonger f par continuité au point z_0 par une fonction holomorphe dans $D_R(z_0)$?

Définition 1.3.1 *Si le prolongement est impossible, on dit que z_0 est un point singulier isolé de f.*

Si le prolongement est possible, on dit que z_0 est une fausse singularité (sing. apparente) de f.

Exemple 1.3.1 *La fonction $z \longmapsto f(z) = \frac{\sin z}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}^*$, on a $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 1$,donc on peut prolonger f par continuité au point $z_0 = 0$ et la fonction obtenue,*

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & si \quad z \in \mathbb{C}^* \\ 1 & si \quad z = 0 \end{cases}$$

est holomorphe dans tout $\mathbb{C}$. Le point $z_0 = 0$ est une fausse singularité pour f.

La fonction $z \longmapsto f(z) = e^{1/z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}^*$et on sait que

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + ... + \frac{1}{n!z^n} + ...$$

d'où

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$$

et par suite, on ne peut pas prolonger f par continuité au point $z_0 = 0$. Le point $z_0 = 0$ est donc un point singulier isolé de f.

Proposition 1.3.1 *Le point z_0 est une fausse singularité de f si, et seulement si, f est bornée au voisinage de z_0.*

Preuve. Si z_0 est une fausse singularité de f, alors f pouvant être prolongée par une fonction continue, elle est alors bornée au voisinage de z_0. Réciproquement, si f est bornée au voisinage de z_0, il existe un réel $\varrho \in]0, R[$et un nombre $M > 0$ tels que l'on ait $|f(z)| \leq M$ si $z \in \Delta_\varrho(z_0)$.

Les coefficients a_n, $n \in \mathbb{Z}$ du développement deLaurent de f dans le disque pointé $\Delta_R(z_0)$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $r \in]0, \varrho[$ la relation

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

Si $n < 0$, on a $\lim\limits_{r \to +\infty} \frac{M(r)}{r^n} = 0$, par suite $a_n = 0$ si $n < 0$. On a alors

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{et} \qquad \lim_{z \to z_0} f(z) = a_0.$$

On peut donc prolonger par continuité f en $z_0$en posant $f(z_0) = a_0$ et la fonction prolongée est holomorphe dans $D_R(z_0)$, elle est la somme d'une série entière. ■

Singularité isolée.

Dire que z_0 est un point singulier isolé de f équivaut à dire que f est non bornée au voisinage de z_0, autrement dit que les coefficients a_n, $n < 0$, du développement de Laurent de f dans le disque pointé $\Delta_R(z_0)$ ne sont pas tous nuls.

Il y a alors deux cas à envisager :

1^{er}cas. Un nombre fini de coefficients a_n, $n < 0$, sont non nuls.

$2^{ème}$cas. Une infinité de coefficients a_n, $n < 0$, sont non nuls.

Définition 1.3.2 *Une singularité isolée z_0 d'une fonction holomorphe f est dite :*
Un pôle d'ordre m si son développement de Laurent dans un disque pointé $\Delta_R(z_0)$ est de la forme,

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + ... + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$$

avec

$$a_{-m} \neq 0.$$

Une singularité essentielle isolée si son développement de Laurent $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ comporte un nombre infini de coefficients a_n, $n<0$, non nuls.
Si z_0 est un pôle d'ordre m pour f, la fonction $z \longmapsto g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ est bornée au voisinage de (z_0) ($\lim_{z\to z_0} g(z) = a_{-m} \neq 0$) et ce point z_0 est une fausse singularité de g.
Un pôle d'ordre 1 est dit pôle simple, et dans ce cas le développement de Laurent de f s'écrit,

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$$

avec

$$a_{-1} \neq 0.$$

Lorsque z_0 est un pôle d'ordre m de f, la fraction rationnelle,

$$\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + ... + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)}$$

s'appelle la partie singulière (principale) de f au voisinage de z_0 et la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ est dite la partie entière de .f.

Exemple 1.3.2 - *Le point* $z_0 = 0$ *est un pôle d'ordre* 3 *de la fonction* $f(z) = \frac{e^z}{z^3}$.

- *Le point* $z_0 = 0$ *est un point singulier essentiel isolé de la fonction* $f(z) = e^{1/z}$ *car,*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}.$$

Proposition 1.3.2 *Soient* D *un ouvert de* $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$ *et* f *une fonction holomorphe dans* $D - \{z_0\}$. *Pour que* z_0 *soit un pôle de* f, *il faut et il suffit que* $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.

Preuve. Supposons que z_0 soit un pôle d'ordre m de f. Alors, il existe une fonction g holomorphe dans D vérifiant $g(z_0) \neq 0$ telle que pour tout z de $D - \{z_0\}$on ait :

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}.$$

Comme $|f(z)| = \frac{|g(z)|}{|(z - z_0)|^m}$ et $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$, on en déduit que $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.

Réciproquement, si $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$. Il existe alors un disque pointé $\Delta_R(z_0)$ sur lequel f ne s'annule pas. Sur ce disque la fonction $\frac{1}{f}$ est holomorphe, et comme $\lim_{z \to z_0} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = 0$, elle admet un prolongement holomorphe h défini sur le disque $D_R(z_0)$ et on a $h(z_0) = 0$.

La fonction h est développable en série entière au voisinage de z_0 et on a pour $|z - z_0|$ assez petit,

$$h(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{h^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Comme h n'est pas identiquement nulle au voisinage de z_0, il existe un plus petit entier p tel que $h^{(p)}(z_0) \neq 0$ et on a $p \geq 1$(car $h(z_0) = 0$).

Le nombre z_0 est alors un zéro d'ordre p de h et on a : $h(z) = (z - z_0)^p k(z)$ où k est une fonction holomorphe au voisinage de z_0 telle que $k(z_0) \neq 0$.

La fonction $\frac{1}{k}$ étant non nulle et holomorpheau voisinage de z_0, on en déduit que z_0 est un pôle d'ordre p de f car pour $|z-z_0|$ assez petit, on a : $f(z) = \frac{(\frac{1}{k(z)})}{(z-z_0)^p}$. ■

Définition 1.3.3 *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\Omega \subset D$ sans points d'accumulation intérieurs à D. Si f est holomorphe dans $D - \Omega$ et si f admet pour pôles les points de Ω, on dit que f est méromorphe dans D.*

Exemple 1.3.3 *- La fonction rationnelle $z \longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes à coefficients complexes tels que $Q \neq 0$, est méromorphe dans $\mathbb{C}$.*
Car elle admet pour pôles, les zéros du polynôme Q.
- Si D est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et si f est holomorphe dans D et non identiquement nulle dans D, son inverse est une fonction méromorphe dans D. Car les pôles de $\frac{1}{f}$ sont les zéros de f et on sait qu'ils sont isolés.