Chapitre 1

Fonctions élémentaires

Fonction polynôme

Définition 1.0.1 *La fonction*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$$

où $n \in \mathbb{N}$, a_0, a_1, ... , $a_n \neq 0$ *des constantes complexes, est appelée polynôme de degré* n.

Propriétés

- La fonction polynôme est définie et continue dans tout $\mathbb{C}$.

- La fonction polynôme est uniforme.

- La fonction polynôme est analytique dans tout $\mathbb{C}$ et

$$P^{'}(z) = \frac{d}{dz}(P(z)) = a_1 + ... + n a_n z^{n-1}.$$

Fonction rationnelle

Définition 1.0.2 *La fonction*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + ... + b_m z^m}$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont deux polynômes de degrés respectifs n et m, est appelée fonction rationnelle.

Propriétés

- La fonction rationnelle est définie et continue en tout point $z \in \mathbb{C}$ tel que $Q(z) \neq 0$.

- La fonction rationnelle est uniforme.

- La fonction rationnelle est analytique en tout point $z \in \mathbb{C}$ tel que $Q(z) \neq 0$ et

$$\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)' = \frac{d}{dz}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right) = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}.$$

1.1 Fonction exponentielle

Définition 1.1.1 *La fonction*

$$e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$z \to f(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$$

où $z = x + iy$, est appelée fonction exponentielle et est notée e^z.

Propriétés de l'exponentielle

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{(z_1+z_2)} = e^{z_1} e^{z_2}$

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{(z_1 - z_2)}$

- $\forall z \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$

- $|e^z| = e^x$

- $arg(e^z) = y$

- La fonction e^z est uniforme, périodique de période $2\pi i$.

- La fonction e^z est analytique dans tout $\mathbb{C}$ et

$$f'(z) = \frac{de^z}{dz} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

(Les conditions de C-R sont vérifiées dans tout $\mathbb{C}$ et P et Q différentiables dans tout $\mathbb{C}$).

1.2 Fonction logarithme

Etant donné un nombre complexe z, cherchons tous les nombres complexes u tels que,

$$e^u = z \qquad\qquad (*)$$

Pour tout nombre complexe u, on a $e^u \neq 0$, donc si $z = 0$, le problème n'a pas de solution. Si $z \in \mathbb{C}$, en posant $u = x + iy$, avec x et y réels, la relation (*) équivaut à :

$$e^{(x+iy)} = |z|\, e^{i \arg z}$$

par suite, si la relation (*) est vérifiée, on a :

$$e^x = |z|$$

soit

$$x = \ln |z|$$

et y est un argument de z.

Par définition, on appelle logarithme de z et on note $\log z$, tout nombre complexe qui s'écrit,

$$\log z = \ln |z| + i \arg z.$$

Propriétés du logarithme

- $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$.

- $\log\left(\frac{1}{z}\right) = -\log z$.

- La fonction log est multiforme.

(La fonction arg : $z \longmapsto \arg z$, est multiforme ; $\quad e^{i \arg z} = e^{i(\arg z + 2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$).

Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0. On appelle détermination de log dans D une fonction $f : D \to \mathbb{C}$, continue sur D, telle que

$$\forall z \in D,\ e^{f(z)} = z$$

On appelle détermination de arg dans D une fonction $g : D \to \mathbb{R}$, continue sur D, telle que

$$\forall z \in D,\ z = |z|\, e^{ig(z)}$$

Si g est une détermination de $\arg z$ dans D, la fonction $z \longmapsto \ln|z| + ig(z)$ est continue sur

D et définit une détermination de $\log z$ dans D. Réciproquement, si f est une détermination de $\log z$ dans D, sa partie imaginaire est une détermination de $\arg z$.

Il existe des ouverts connexes sur lesquels $\log z$ et $\arg z$ n'admettent aucune détermination. Ainsi, soit $D = \mathbb{C}^*$ et supposons qu'il existe une détermination g de $\arg z$ dans D. Alors pour chaque nombre réel θ, on a $e^{i\theta} = e^{ig(e^{i\theta})}$ et le nombre $\frac{g(e^{i\theta})-\theta}{2\pi}$ est un entier. Comme la fonction ($\theta \longmapsto \frac{g(e^{i\theta})-\theta}{2\pi}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est continue et prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$, elle est nécessairement constante et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que ;

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad g(e^{\theta i}) = \theta + 2k\pi$$

Mais, alors on a $g(1) = g(e^0) = 2k\pi$ et $g(1) = g(e^{2\pi i}) = 2\pi + 2k\pi$, ce qui est impossible.

Il n'existe donc aucune détermination de $\arg z$ sur $\mathbb{C}^*$ et, par conséquent, il n'existe pas non plus de détermination de sur $\mathbb{C}^*$.

Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0. On suppose qu'il existe une détermination $f : D \to \mathbb{C}$ de $\log z$ dans D. Alors la fonction $g : D \to \mathbb{C}$ est une détermination de $\log z$ dans D si et seulement s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que,

$$\forall z \in D,\ g(z) - f(z) = 2k\pi i$$

Si $f : D \to \mathbb{C}$ est une détermination de $\log z$ dans D, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction g définie sur D par $g(z) = f(z) + 2k\pi i$ est continue et vérifie,

$$\forall z \in D, \quad e^{g(z)} = z.$$

C'est donc une détermination de $\log z$ dans D.

Réciproquement, supposons que f et g soient deux déterminations de $\log z$ dans D. Alors la fonction h définie sur D par,

$$h(z) = \frac{g(z) - f(z)}{2\pi i}$$

est continue sur D et ne prend que des valeurs entières, comme D est connexe, elle est constante. Par suite, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $h(z) = k$, d'où la proposition.

Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0. On suppose qu'il existe une détermination f de log dans D. Alors la fonction f est holomorphe dans D et on a :

$$\forall z \in D, \qquad f'(z) = \frac{1}{z}$$

Montrons que la fonction f est dérivable en un point $z_0 \in D$. Pour chaque nombre complexe non nul u tel que $z_0 + u \in D$, on a :

$$e^{f(z_0+u)} = z_0 + u, \qquad\qquad e^{f(z_0)} = z_0$$

et par suite,

$$\frac{f(z_0+u) - f(z_0)}{u} = \frac{f(z_0+u) - f(z_0)}{e^{f(z_0+u)} - e^{f(z_0)}}$$

La fonction étant continue au point z_0 et la fonction e^z étant dérivable dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(z_0+u)-f(z_0)}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{1}{\frac{e^{f(z_0+u)}-e^{f(z_0)}}{f(z_0+u)-f(z_0)}} = \frac{1}{e^{f(z_0)}} = \frac{1}{z_0}$$

On en déduit que f est dérivable au point z_0 et que,

$$f'(z_0) = \frac{1}{z_0}$$

Détermination principale de log

Posons,

$$U = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \ 0 \leq \operatorname{Im}(z) < 2\pi\}$$

$$V = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \ \operatorname{Re}(z) \geq 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = 0\}$$

$$W = \mathbb{C} - V.$$

La restriction de l'application $z \longmapsto e^z$ à U induit une bijection Ψ de U dans W. L'application Ψ est continue, et pour tout $z \in U$, on a $\Psi(z) = e^z$. Soit φ l'application réciproque de Ψ. Cette fonction φ est appelée détermination principale de log et est notée Log. La partie imaginaire de φ est une détermination de arg dans W, appelée détermination principale de arg et est notée Arg.

1.3 Fonctions puissances

Définition 1.3.1

$$z^\alpha, \quad z \in \mathbb{C}, \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Si, $z \in \mathbb{C}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$, *on désigne par* z^α *tout nombre complexe de la forme* $e^{\alpha u}$ *où* u *est une valeur possible de* $\log z$.

Si D *est un ouvert connexe contenu dans* $\mathbb{C}^*$, *on appelle détermination de* z^α *dans* D *une* *fonction continue* $f : D \to \mathbb{C}$ *telle que pour tout* z *de* D*,* $f(z)$ *soit une valeur possible de* z^{α}*.*

Remarque 1.3.1 *Il est clair qu'à une détermination de* $\log z$ *dans* D*, correspond une détermination de* z^{α} *dans* D*. En particulier, à la détermination principale de* $\log z$ *dans* W *correspond une détermination de* z^{α} *dans* W *que l'on nomme détermination principale de* z^{α}*. Supposons que* z^{α} *possède une détermination* f *sur un ouvert connexe* D*.*
Alors, pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ *la fonction* f_k *définie sur* D *par,*

$$f_k(z) = f(z)e^{2i\alpha k\pi}$$

est une détermination de z^{α} *dans* D*.*

Exemple 1.3.1 *1)* $\log(-2i) = \ln 2 + i\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z},$
et sa détermination principale, $Log\,(-2i) = \ln 2 + i\left(\frac{3}{2}\pi\right).$
2) La détermination principale de $(1+i)^{(2-i)}$ *est,*

$$(1+i)^{(2-i)} = e^{(2-i)Log(1+i)} = e^{(2-i)\left(\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}\right)} = e^{\left(\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right) + i\left(-\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

1.4 Fonctions circulaires

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$tg(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$
$$\cot g(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

1.5 Fonctions hyperboliques

$$
\begin{aligned}
sh\,(z) &= \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \\
ch\,(z) &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \\
th\,(z) &= \frac{sh\,(z)}{ch\,(z)} \\
\coth\,(z) &= \frac{ch\,(z)}{sh\,(z)}
\end{aligned}
$$

Fonctions trigonométriques inverses

$$
\begin{aligned}
arc\sin\,(z) &= \frac{1}{i}\log\left(iz+\sqrt{1-z^{2}}\right) \\
arc\cos\,(z) &= \frac{1}{i}\log\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right) \\
arctg\,(z) &= \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \\
arc\cot g\,(z) &= \frac{1}{2i}\log\left(\frac{z+i}{z-i}\right)
\end{aligned}
$$

Fonctions hyperboliques inverses.

$$
\begin{aligned}
\arg sh\,(z) &= \log\left(z+\sqrt{z^{2}+1}\right) \\
\arg ch\,(z) &= \log\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right) \\
\arg th\,(z) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \\
arg\coth\,(z) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)
\end{aligned}
$$