3. System d'équation Algébrique

3.1 Système linéaires

Soit l'ensemble des équations suivant :

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \cdots a_{3n}x_n = b_3 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 \cdots a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
\tag{3.1}
$$

L'ensemble des équations (3.1) peut être écrit sous la forme suivante

$$[A]\{x\} = \{b\} \tag{3.2}$$

Où $[A]$ est la matrice :

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\tag{3.3}
$$

La solution de l'équation (3.2) peut s'écrire

$$\{\vec{x}\} = A^{-1}.\{\vec{b}\} \tag{3.4}$$

Sachant que le calcul de l'inverse de la matrice $[A]$ peut être compliqué

Exemple :

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 8 \\ 11 \end{Bmatrix}
\Rightarrow
\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 = 11 \end{cases}
\tag{3.5}
$$

Comme on peut le voir sur l'équation (3.5) on déduit x_2 en fonction de x_1 cependant c'est compliquer à ***programmer.***

Exemple :

Il existe des systèmes faciles à résoudre même si ils sont de grande taille.

- ❖ Le cas le plus simple est la matrice diagonale*

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{Bmatrix}
\Rightarrow \vec{x} =
\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{Bmatrix}
\Rightarrow x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}
\tag{3.6}
$$

*ce cas est rarement trouvable

- Le deuxième type de système simple est le système triangulaire inférieur ou supérieur.
  - ✓ Pour le triangulaire inférieur tous les a_{ij} sont nul pour $i \prec j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Une triangulaire supérieure est la transposée de la triangulaire inférieure.

« Les systèmes triangulaires sont faciles à résoudre »

On commence par la pointe du triangle puis on résout une à une les équations.

<u>Exemple</u>

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 7 \\ 14 \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

- La première équation

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{9}{3} = \boxed{3} \tag{3.9}$$

- La 2eme équation (x_1 est connu on peut trouver x_2)

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}} = \frac{7-(1)(3)}{2} = \boxed{2} \tag{3.10}$$

- La 3eme équation (x_1 et x_2 sont connus on peut trouver x_3)

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} = \frac{14-(3)(3)-(2)(2)}{1} = \boxed{1} \tag{3.11}$$

La loi générale (Algorithme) se trouve la page 106 du livre « Méthode numérique pour l'ingénieur d'André Fortin 4eme édition ».

Il est important de souligner que pour cette méthode les termes de la diagonale ne doivent en aucun cas être nuls.

- On doit ramener un système linéaire quelconque à un ou plusieurs systèmes triangulaires.
- L'élimination de Gauss est un cas particulier de la décomposition LU.

Comment faire pour rendre un système triangulaire ?

On multiplie notre système $A\vec{x}=\vec{b}$ par $W \Rightarrow WA\vec{x}=W\vec{b} \Rightarrow$ On peut re-multiplier par W^{-1}

*La matrice W doit être inversible pour pouvoir calculer W^{-1}

3.2 Opération élémentaire sur les lignes des matrices

Trois (3) opérations qui correspondent à trois (3) types de matrice W

1. Remplacer une ligne l_i par un multiple d'elle-même $\vec{l}_i \leftarrow \lambda\vec{l}_i$
2. Intervertir la ligne i en ligne j $\vec{l}_i \leftrightarrow \vec{l}_j$
3. Remplacer une ligne l_i par la ligne l_i plus un multiple de la ligne j, $\vec{l}_i \leftarrow \vec{l}_i + \lambda\vec{l}_j$

Exemples :

- Multiple d'une ligne (on veut multiplier la 2eme ligne de la matrice A par 3)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \end{Bmatrix}}_{\{b\}} \tag{3.12}$$

On multiplie la matrice $[A]$ par la matrice $[M]$ (il est important de multiplier le vecteur $\{b\}$ par la même matrice afin d'assurer l'équilibre de l'équation (3.12).

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[M]} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 18 & 12 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Apres la multiplication du vecteur $\{b\}$ par la matrice $[M]$ on obtient l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 18 & 12 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ \boxed{33} \\ 10 \end{Bmatrix} \tag{3.14}$$

Il est important de noter que les équations (3.12) et (3.14) ont la même solution.

L'inverse de la matrice $[M]$ est $[M]^{-1}$ ou $M(\vec{l}_i \leftarrow (1/\lambda)\vec{l}_i)$

- Permutation de deux lignes (on veut permuter la ligne 2 et 3)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \end{Bmatrix}}_{\{b\}} \tag{3.15}$$

On multiplie la matrice $[A]$ par la matrice $[P]$ (il est important de multiplier le vecteur $\{b\}$ par la même matrice afin d'assurer l'équilibre de l'équation (3.15).

La matrice $[P]$ est une matrice diagonale unitaire à la base, on change les uns (1) de la diagonale par exemple pour notre cas le A(2,2) =1 deviens A(2,3) = 1, ainsi la deuxième ligne de la matrice est permuter vers le 3eme linge et le A(3,3) = 1 deviens A(3,2) = 1 ainsi la 3eme ligne est permuter vers la 2eme ligne.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[P]} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Apres la multiplication du vecteur $\{b\}$ par la matrice $[P]$ on obtient l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 10 \\ 11 \end{Bmatrix} \tag{3.17}$$

Il est important de noter que les équations (3.15) et (3.17) ont la même solution.

L'inverse de la matrice $[P]$ est la matrice $[P]$ elle-même.

- Remplacer est multiplication d'une ligne

$$\begin{array}{r} \leftarrow \\ -2 \\ \rightarrow \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \end{Bmatrix}}_{\{b\}} \tag{3.18}$$

On veut remplacer la 2eme ligne par elle-même moins (2) deux fois la première ligne. Pour cela on multiplie par la matrice $[T]$, la matrice $[T]$ à la base est une matrice diagonale unitaire, on croise la colonne du pivot et la ligne qu'on veut remplacer pour obtenir la localisation du facteur qu'on doit introduire.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[T]} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ \boxed{0} & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.19)$$

Apres la multiplication du vecteur $\{b\}$ par la matrice $[T]$ on obtient l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ \boxed{0} & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ -1 \\ 10 \end{Bmatrix} \qquad (3.20)$$

Il est important de noter que les équations (3.18) et (3.20) ont la même solution.

Pour trouver l'inverse de la matrice $[T]$ il suffit de remplacer λ par -λ dans

Dans l'équation (3.20) on peut remarquer qu'on a introduit un zéro (0) dans la matrice [A], en remplaçant la ligne 3 par la ligne 3 moins (3/5) la ligne on introduirait un zéro (0) à la position a_{31} et ainsi de suite on peut transformer un système quelconque en un système triangulaire. C'est la base sur laquelle repose la méthode de l'élimination de Gauss.

3.3 L'élimination de Gauss

3.3.1 La matrice augmentée

Les opérations vont se faire sur la matrice $[A]$ et le vecteur $\{\vec{b}\}$ donc on écrit

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \qquad (3.21)$$

Gauss a utilisé les opérations pour introduire des zéros sous la diagonale

<u>Exemple</u>

On a le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 10 \\ 6x_1 + 4x_2 + 0x_3 = 26 \\ 8x_1 + 5x_2 + 1x_3 = 35 \end{cases} \tag{3.22}$$

Dont l'écriture de la matrice augmentée est la suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{array}\right] \tag{3.23}$$

On veut introduire des zéros sous la diagonale, on va donc éliminer le 6 et le 8 on s'appuyant sur le numéro 2 qui servira de pivot.

$$\begin{array}{c} \\ -6/2 \\ -8/2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 2 & 10 \\ \boxed{6} & 4 & 0 & 26 \\ \boxed{8} & 5 & 1 & 35 \end{array}\right] \tag{3.24}$$

Pour éliminer le 6 on multiplie par la matrice T_1 comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[T_1]} * \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{array}\right]}_{[A]} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{array}\right]}_{[T_1]\times[A]} \tag{3.25}$$

Pour éliminer le 8 on multiplie la nouvelle matrice augmentée montrer dans l'équation (3.25) par la matrice T_2 comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[T_2]} * \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{array}\right]}_{[T_1]\times[A]} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{array}\right]}_{[T_2]\times[T_1]\times[A]} \tag{3.26}$$

La matrice obtenue dans l'équation (3.26) n'est pas triangulaire il faut éliminer le 1 dont les coordonnées sont 1(3,2) [3eme ligne, 2eme colonne] pour cela on va utiliser le 1(2,2) [2eme ligne, 2eme colonne] comme pivot comme le montre l'équation (3.27)

$$\begin{array}{c} \\ \\ -1/1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & \boxed{1} & -6 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & -7 & -5 \end{array}\right] \tag{3.27}$$

Pour cela on multiplie la matrice dans l'équation (3.27) par la matrice T_3 comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{[T_3]} * \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{array}\right]}_{[T_2]\times[T_1]\times[A]} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]}_{[T_3]\times[T_2]\times[T_1]\times[A]} \tag{3.28}$$

On obtient ainsi une matrice triangulaire supérieure, pour résoudre le système il suffit de faire une remontée triangulaire.

$$\begin{aligned} &\text{On trouve } x_3 = {}^{-1}\!/_{-1} = \boxed{1} \\ &\text{D'ou } x_2 = \frac{-4-(-6)(1)}{1} = \boxed{2} \\ &\text{Et enfin } x_1 = \frac{10-(1)(2)-(2)(1)}{2} = \boxed{3} \end{aligned} \tag{3.29}$$

On peut résumé les opérations effectuer sur le système dans l'équation (3.23) par l'écriture suivante :

$$\begin{aligned} &T_1[\vec{l}_2 \leftarrow \vec{l}_2 - ({}^{6}\!/_{2})\vec{l}_1] \\ &T_2[\vec{l}_3 \leftarrow \vec{l}_3 - ({}^{8}\!/_{2})\vec{l}_1] \\ &T_3[\vec{l}_3 \leftarrow \vec{l}_3 - ({}^{1}\!/_{1})\vec{l}_2] \end{aligned} \tag{3.30}$$

La matrice triangulaire supérieure obtenue dans l'équation (3.28) est dénotée $[U]$ pour « Upper » en anglais qui signifie supérieures. Ainsi on peut écrire

$$[U] = [T_3]\times[T_2]\times[T_1]\times[A] \tag{3.31}$$

D'une manière explicite

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

Maintenant si on veut faire l'inverse c'est-à-dire calculer $[A]$ en fonction de $[U]$ il suffit de diviser l'équation (3.31) par les matrice $[T_3],[T_2]$ et $[T_1]$ ainsi on obtient :

$$[A] = \left[T_1^{-1}\right]\times\left[T_2^{-1}\right]\times\left[T_3^{-1}\right]\times[U] \tag{3.33}$$

On connait les inverses des matrices $[T_i]$ (voir page 5) il suffit dans multiplier le signe du coefficient λ par un signe négatif (-). Ainsi on obtient l'écriture suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 6 & 4 & 0\\ 8 & 5 & 1\end{bmatrix}}_{[A]}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{[T_1^{-1}]}\times\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{[T_2^{-1}]}\times\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}}_{[T_3^{-1}]}\times\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}}_{[U]} \tag{3.34}$$

Ou encore

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 6 & 4 & 0\\ 8 & 5 & 1\end{bmatrix}}_{[A]}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}}_{\substack{\text{Lower}\\ \text{inférieure}}}\times\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\substack{\text{Upper}\\ \text{supérieur}}} \tag{3.35}$$

Donc on a écrit la matrice $[A]$ sous la forme d'une multiplication d'une matrice inférieure notée « L » et une matrice supérieure notée « U » c'est **la décomposition « LU »**

- Dans le cas où aucune permutation de lignes n'est effectuer.

3.4 Décomposition « LU »

On a réussi à écrire la matrice $[A]$ de la forme $[A]=[L][U]$ comment cela va nous aider à résoudre $[A]\{\vec{x}\}=\{\vec{b}\}$?

On écrit :

$$[A]\{\vec{x}\}=[L][U]\{\vec{x}\}=\{\vec{b}\} \tag{3.36}$$

On pose

$$[U]\{\vec{x}\}=\{\vec{y}\} \tag{3.37}$$

La résolution du système linaire se fait alors en deux étapes :

$$\begin{cases}[L]\{\vec{y}\}=\{\vec{b}\}\rightarrow 1\\ [U]\{\vec{x}\}=\{\vec{y}\}\rightarrow 2\end{cases} \tag{3.38}$$

On a donc deux systèmes triangulaires, on commence par résoudre le premier système pour obtenir $\{\vec{y}\}$ puis en utilisant $\{\vec{y}\}$ on résous le 2ème système pour obtenir la solution chercher c'est-à-dire le vecteur $\{\vec{x}\}$

Important :

- On peut écrire une matrice $[A]$ comme étant le produit de deux matrices triangulaires d'une multitude de façon.