

Département des Mathématiques

2ème Année

Devoir2 : Analyse numérique

Résoudre par la méthode itérative simple (Jacobi) le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 4 \end{cases} \quad (1)$$

Avec la méthode itérative simple le système (1) s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}(5 + 3x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}(6 - 2x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{8}(4 - 2x_1^{(k)} + 3x_3^{(k)}) \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Solution :

- avec la main, réalisons deux itérations, en partant de la valeur initiale $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$

$$k = 0 : \begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{5}(5 + 3x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{1}{5}(5 + 3(1) - (1)) = 1,4 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{4}(6 - 2x_1^{(0)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}(6 - 2(1) + (1)) = 1,25 \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{8}(4 - 2x_1^{(0)} + 3x_3^{(0)}) = \frac{1}{8}(4 - 2(1) + 3(1)) = 0,625 \end{aligned}$$

$$k = 1 : \begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{5}(5 + 3x_2^{(1)} - x_3^{(1)}) = \frac{1}{5}(5 + 3(1,25) - (0,625)) = 1,6250 \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{4}(6 - 2x_1^{(1)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{4}(6 - 2(1,4) + (0,625)) = 0,9563 \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{8}(4 - 2x_1^{(1)} + 3x_3^{(1)}) = \frac{1}{8}(4 - 2(1,4) + 3(0,625)) = 0,6188 \end{aligned}$$

- Maintenant nous allons calculer la solution avec Matlab

La fonction Matlab suivante reçoit un vecteur et fait sortir un nouveau vecteur à chaque itération :

```
function x= jacobi(a,b,x)
n=length(x);
t=x
for i=1 :n
s=a(i,1:i-1)*t(1:i-1)+a(i,i+1:n)*t(i+1:n);
x(i)=(b(i)-s)/a(i,i);
end
```

Utilisons la fonction jacobi pour l'exemple antérieur (n'oubliez pas que n=3, dans notre exemple)

```
>> a=[5,-3,1; 2,4,-1; 2,-3,8]
```

```
>> b=[5;6;4]
>>x=[1;1;1]; vecteur initial
>> x=jacobi(a,b,x) répétez cette commande et observez la convergence
```

```
x =
1.4000
1.2500
0.6250
```

```
>> x=jacobi(a,b,x)
```

```
x =
1.6250
0.9563
0.6188
```

```
>> x=jacobi(a,b,x)
```

```
x =
1.4500
0.8422
0.4523
```