جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر2
2020/2019

السلسلة رقم 01
الفضاءات الشعاعية والفضاءات الشعاعية الجزئية

التمرين 01: نزود $E = \mathbb{R}$ بقانون تركيب داخلي $\oplus$ وقانون تركيب خارجي $\otimes$ بالشكل التالي:

$$\oplus: E \times E \to E \qquad\qquad \otimes: \mathbb{R} \times E \to E$$
$$(x\,,y) \mapsto x \oplus y = x + y + 1 \qquad\qquad (\alpha\,,\ x) \mapsto \alpha \otimes x = \alpha x + \alpha - 1$$

بين أن $(E, \oplus, \otimes)$ فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{R}, +, .)$.

التمرين 02: نعرف على $E = \mathbb{R}^2$ العمليتين:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(a + ib).(x, y) = (ax - by, ay - bx)$$

هل $(E, +, .)$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{C}$؟

التمرين 03: في كل حالة من الحالات التالية، هل $(\mathbb{R}^2, +, .)$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$؟

1) $\alpha.(x, y) = (\alpha x, y)$ ؛ $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

2) $\alpha.(x, y) = (\alpha y, \alpha x)$ ؛ $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

3) $\alpha.(x, y) = (\alpha x, y)$ ؛ $(x, y) + (x', y') = (xx', yy')$

التمرين 04: في كل حالة من الحالات التالية، تحقق إن كانت المجموعات الجزئية F_i تشكل فضاءا شعاعيا جزئيا من الفضاء الشعاعي E.

الفضاء الشعاعي E	المجموعات الجزئية F_i
$E = \mathbb{R}^2$	$F_1 = \{(x, y) \in E /\ 2x + y = 0\}$ $F_2 = \{(x, y) \in E /\ x + y = 1\}$ $F_3 = \{(x, y) \in E /\ x^2 - y = 0\}$
$E = \mathbb{R}^3$	$F_4 = \{(x, y, z) \in E /\ 2x - y + z = 0\}$ $F_5 = \{(x, y, z) \in E /\ e^x e^z = 0\}$ $F_6 = \{(x, y, z) \in E /\ y(x^2 + z^2) = 0\}$
$E = \mathbb{P}_1[\mathrm{X}]$	$F_7 = \{P \in E, P'(0) = 2\}$ $F_8 = \{P \in E, P(1) = P'(1)\}$ $F_9 = \{P \in E, P(0) = P(2)\}$
$E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$F_{10} = \left\{f \in E / f \text{ فردية}\right\}$ $F_{11} = \left\{f \in E / f \text{ متزايدة}\right\}$ $F_{12} = \{f \in E / \forall x \in \mathbb{R}: f(x + 1) = f(x)\}$

جامعة محمد خيضر بسكرة
ك. ع. د. ع. ط. ح
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر 2
2020 / 2019

السلسلة 01

الفضاءات الشعاعية والفضاءات الشعاعية الجزئية

التمرين 01: نزود $E=\mathbb{R}$ بقانون تركيب داخلي $\oplus$ وقانون تركيب خارجي $\otimes$ بالشكل التالي:

$$\oplus : E\times E \longrightarrow E$$
$$(x,y)\longmapsto x\oplus y = x+y+1.$$

$$\otimes : \mathbb{R}\times E \longrightarrow E$$
$$(\alpha,x)\longmapsto \alpha\otimes x = \alpha x+\alpha-1.$$

نبين أن $(E,\oplus,\otimes)$ فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{R},+,\cdot)$:

نقول أن $(E,\oplus,\otimes)$ فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{K},+,\cdot)$ إذا تحقق:

① $(E,\oplus)$ زمرة تبديلية:
- $\oplus$ تجميعية
- $\oplus$ تقبل عنصر حيادي
- لكل عنصر نظير بالنسبة لـ $\oplus$
- $\oplus$ تبديلية.

② $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{K},\ \forall X,Y\in E:$

ⓐ $\alpha\otimes(X\oplus Y)=(\alpha\otimes X)\oplus(\alpha\otimes Y)$

ⓑ $(\alpha+\beta)\otimes X=(\alpha\otimes X)\oplus(\beta\otimes X)$

ⓒ $(\alpha\cdot\beta)\otimes X=\alpha\otimes(\beta\otimes X)$

ⓓ $1_{\mathbb{K}}\otimes X = X$

① $(E,\oplus)$ زمرة تبديلية:

$\oplus$ تجميعية:

$\forall x,y,z\in E: (x\oplus y)\oplus z \overset{?}{=} x\oplus(y\oplus z)$

ليكن $x,y,z\in E$

$(x\oplus y)\oplus z=(x+y+1)\oplus z$
$=(x+y+1)+z+1$
$=x+y+z+2 \quad \ldots\ldots (1)$

$x\oplus(y\oplus z)=x\oplus(y+z+1)$
$=x+(y+z+1)+1$
$=x+y+z+2 \quad \ldots\ldots (2)$

$(1)=(2)$ إذن: $\oplus$ تجميعية.

$\oplus$ تبديلية: $\forall x,y\in E: x\oplus y=y\oplus x$?

ليكن: $x,y\in E$

$x\oplus y=x+y+1 \quad \ldots\ldots (1)$

$y\oplus x=y+x+1 \quad \ldots\ldots (2)$

$(1)=(2)$ لأن الجمع تبديلي في $\mathbb{R}$.

إذن: $\oplus$ تبديلية.

العنصر الحيادي:

$\exists e\in E, \forall x\in E: x\oplus e=e\oplus x=x$

بما أن: $\oplus$ تبديلية فإنه يكفي أخذ معادلة واحدة:

$x\oplus e=x \Rightarrow \cancel{x}+e+1=\cancel{x}$
$\Rightarrow e=-1\in E$

إذن: العنصر الحيادي هو: $e=-1$.

العنصر النظير:

$\forall x\in E, \exists x'\in E: x\oplus x'=x'\oplus x=e$

بما أن: $\oplus$ تبديلية فإنه يكفي أخذ معادلة واحدة:

$x\oplus x'=e \Rightarrow x+x'+1=-1$
$\Rightarrow x'=-x-2 \in E.$

إذن: العنصر النظير هو: $x'=-x-2$

ومنه: $(E,\oplus)$ زمرة تبديلية.

② ليكن

$\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall x,y\in E$

ⓐ $\alpha\otimes(x\oplus y)\overset{?}{=}(\alpha\otimes x)\oplus(\alpha\otimes y)$

$\alpha\otimes(x\oplus y)=\alpha\otimes(x+y+1)$
$=\alpha(x+y+1)+\alpha-1$
$=\alpha x+\alpha y+2\alpha-1 \quad \ldots\ldots (1)$

$(\alpha\otimes x)\oplus(\alpha\otimes y)=(\alpha x+\alpha-1)\oplus(\alpha y+\alpha-1)$
$=(\alpha x+\alpha-1)+(\alpha y+\alpha-1)+1$
$=\alpha x+\alpha y+2\alpha-1 \quad \ldots\ldots (2)$

$(1)=(2)$ إذن الشرط ⓐ محقق.

ⓑ $(\alpha+\beta)\otimes x \overset{?}{=}(\alpha\otimes x)\oplus(\beta\otimes x)$

$(\alpha+\beta)\otimes x=(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)-1$
$=\alpha x+\beta x+\alpha+\beta-1 \quad \ldots\ldots (1)$

$(\alpha\otimes x)\oplus(\beta\otimes x)=(\alpha x+\alpha-1)\oplus(\beta x+\beta-1)$
$=(\alpha x+\alpha-1)+(\beta x+\beta-1)+1$
$=\alpha x+\beta x+\alpha+\beta-1 \quad \ldots\ldots (2)$

$(1)=(2)$ إذن: الشرط ⓑ محقق.

ⓒ $(\alpha\cdot\beta)\otimes x \overset{?}{=}\alpha\otimes(\beta\otimes x)$

$(\alpha\cdot\beta)\otimes x=(\alpha\cdot\beta)x+(\alpha\cdot\beta)-1$
$=\alpha\beta x+\alpha\beta-1 \quad \ldots\ldots (1)$

$$\alpha\otimes(\beta\otimes x)=\alpha\otimes(\beta x+\beta-1)$$
$$=\alpha(\beta x+\beta-1)+\alpha-1$$
$$=\alpha\beta x+\alpha\beta-1 \quad \ldots\ldots (2)$$

اذن: $(1)=(2)$ الشرط ⓒ محقق.

ⓓ $1_{\mathbb{R}}\otimes x \overset{?}{=} x$

العنصر الحيادي للحقل $\mathbb{R}$ بالنسبة للعملية الثانية (الضرب). $1_{\mathbb{R}}=1$

$$1_{\mathbb{R}}\otimes x=1\otimes x$$
$$=1\cdot x+1-1$$
$$=x$$

اذن: الشرط ⓓ محقق.

ومنه: $(E,\oplus,\otimes)$ فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

<u>التمرين 02</u>: نعرف على $E=\mathbb{R}^2$ العمليتين:

$$\underset{\in E}{(x,y)}\ \underset{\text{عملية داخلية}}{+}\ \underset{\in E}{(x',y')}=\underbrace{(x+x',y+y')}_{\in E}$$

$$\underset{\in K=\mathbb{C}}{(a+ib)}\ \underset{\text{عملية خارجية}}{\cdot}\ \underset{\in E}{(x,y)}=\underbrace{(ax-by,ay-bx)}_{\in E}.$$

$(E,+,\cdot)$ ليس فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{C},+,\cdot)$ لأن: الشرط ⓒ غير محقق:

ليكن $\alpha=a+ib,\ \beta=a'+ib'\in\mathbb{C}$

$(x,y)\in E$

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot(x,y)$$
$$=((a+ib)\cdot(a'+ib'))\cdot(x,y)$$
$$=(aa'+iab'+iba'-bb')\cdot(x,y)$$
$$=((aa'-bb')+i(ab'+ba'))\cdot(x,y)$$
$$=((aa'-bb')x-(ab'+ba')y,\ (aa'-bb')y-(ab'+ba')x)$$
$$=(aa'x-bb'x-ab'y-ba'y,\ aa'y-bb'y-ab'x-ba'x)\ \ldots\ldots (1)$$

$$\alpha\cdot(\beta\cdot(x,y))$$
$$=(a+ib)\cdot((a'+ib')\cdot(x,y))$$
$$=(a+ib)\cdot(a'x-b'y,a'y-b'x)$$
$$=(a(a'x-b'y)-b(a'y-b'x),\ a(a'y-b'x)-b(a'x-b'y))$$
$$=(aa'x-ab'y-ba'y+bb'x,\ aa'y-ab'x-ba'x+bb'y)\ \ldots\ldots (2)$$
$$(1)\neq(2)$$

<u>التمرين 03</u>: في كل حالة من الحالات التالية، هل $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ف.ش. على الحقل $\mathbb{R}$ ؟

1) $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$

$\alpha\cdot(x,y)=(\alpha x,y)$

في هذه الحالة $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ليس ف.ش. على الحقل $\mathbb{R}$ لأن: الشرط ⓑ غير محقق:

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ، $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$(\alpha+\beta)\cdot(x,y)=((\alpha+\beta)x,y)\ \ldots\ldots (1)$$
$$\alpha\cdot(x,y)+\beta\cdot(x,y)=(\alpha x,y)+(\beta x,y)$$
$$=(\alpha x+\beta x,y+y)$$
$$=((\alpha+\beta)x,2y)\ \ldots (2)$$
$$(1)\neq(2)$$

2) $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$

$\alpha\cdot(x,y)=(\alpha y,\alpha x)$

في هذه الحالة $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ليس ف.ش. على الحقل $\mathbb{R}$ لأن: الشرط ⓓ غير محقق:

ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$1_{\mathbb{R}}\cdot(x,y)=1\cdot(x,y)=(1\cdot y,1\cdot x)=(y,x)\neq(x,y)$$

3) $(x,y)+(x',y')=(xx',yy')$

$\alpha\cdot(x,y)=(\alpha x,y)$

في هذه الحالة $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ليس ف.ش. على الحقل $\mathbb{R}$ لأن: الشرط ⓐ غير محقق:

ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$ ، $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$

$$\alpha\cdot((x,y)+(x',y'))=\alpha\cdot(xx',yy')=(\alpha xx',yy')\ \ldots (1)$$
$$\alpha\cdot(x,y)+\alpha\cdot(x',y')=(\alpha x,y)+(\alpha x',y')$$
$$=(\alpha^2xx',yy')\ \ldots (2)$$
$$(1)\neq(2)$$

<u>التمرين 04</u>: في كل حالة من الحالات التالية، نتحقق اذا كانت المجموعات الجزئية F_i تشكل فضاء اشعاعا جزئيا من الفضاء الشعاعي E:

> E ف.ش. على الحقل K، يكون F ف.ش. جزئي من E اذا تحقق:
>
> ① $F\subset E$ ، $\emptyset\neq F$ ($0_E\in F$).
>
> ② $\forall\alpha,\beta\in K,\ \forall X,Y\in F:(\alpha X+\beta Y)\in F$

* $E=\mathbb{R}^2$

1) $F_1=\{(x,y)\in E/2x+y=0\}$.

* ① ليكن $(x,y)\in F_1\Rightarrow(x,y)\in E/2x+y=0$

* $E = \mathbb{R}^3$.

4) $F_4 = \{(x,y,z) \in E / 2x - y + z = 0\}$.

① * $F_4 \subset E$ (من تعريف المجموعة F_4).

* $0_E = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3 / 2\cdot 0 - 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in F_4 \Rightarrow F_4 \neq \emptyset$.

② ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $X, Y \in F_4$

$X \in F_4 \Rightarrow X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0$.

$Y \in F_4 \Rightarrow Y = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 / 2x' - y' + z' = 0$.

$\alpha X + \beta Y = \alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z')$

$= (\underbrace{\alpha x + \beta x'}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\alpha y + \beta y'}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\alpha z + \beta z'}_{\in \mathbb{R}}) \in \mathbb{R}^3$

$2(\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z')$

$= 2\alpha x + 2\beta x' - \alpha y - \beta y' + \alpha z + \beta z'$

$= \alpha(\underbrace{2x - y + z}_{0}) + \beta(\underbrace{2x' - y' + z'}_{0})$

$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0$

$= 0$

$\Rightarrow (\alpha X + \beta Y) \in F_4$

ومنه: F_4 ف.ش.ج من E.

5) $F_5 = \{(x,y,z) \in E / e^x e^z = 0\}$.

F_5 ليس ف.ش.ج من E لأن:

$0_E = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3 / e^0 . e^0 = 1 \neq 0$.

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \notin F_5$

6) $F_6 = \{(x,y,z) \in E / y(x^2 + z^2) = 0\}$.

F_6 ليس ف.ش.ج من E مثال مضاد:

$\exists X = (0,1,0) \in F_6$ $((0,1,0) \in \mathbb{R}^3 / 1\cdot(0^2 + 0^2) = 0)$

$\exists Y = (1,0,1) \in F_6$ $((1,0,1) \in \mathbb{R}^3 / 0\cdot(1^2 + 1^2) = 0)$

لكن: $X + Y = (0,1,0) + (1,0,1) = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3 / 1\cdot(1^2 + 1^2) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow (1,1,1) \notin F_6$

أي: $(X+Y) \notin F_6$.

* $E = \mathbb{P}_1[X]$

7) $F_7 = \{P \in E / P'(0) = 2\}$

F_7 ليس ف.ش.ج من E لأن:

$0_E = 0_{\mathbb{P}_1[X]} = \Theta(X) = 0.X + 0 \in \mathbb{P}_1[X] / \Theta'(0) = 0 \neq 2$

كثير الحدود المعدوم

$\Rightarrow 0_{\mathbb{P}_1[X]} \notin F_7$.

8) $F_8 = \{P \in E / P(1) = P'(1)\}$.

① * $F_8 \subset E$ (من تعريف المجموعة F_8).

* $0_E = 0_{\mathbb{P}_1[X]} = \Theta(X) = 0.X + 0 \in \mathbb{P}_1[X] /$

$\Theta(1) = 0$, $\Theta'(1) = 0$

أي: $\Theta(1) = \Theta'(1)$

$\Rightarrow \Theta(X) \in F_8 \Rightarrow F_8 \neq \emptyset$.

$\Rightarrow F_1 \subset E$

* $0_E = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in \mathbb{R}^2 : 2\cdot 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^2} \in F_1 \Rightarrow F_1 \neq \emptyset$

② $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in F_1 : (\alpha X + \beta Y) \in F_1$??

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $X, Y \in F_1$

$X \in F_1 \Rightarrow X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0$.

$Y \in F_1 \Rightarrow Y = (x',y') \in \mathbb{R}^2 : 2x' + y' = 0$

$\alpha X + \beta Y = \alpha(x,y) + \beta(x',y')$

$= (\alpha x, \alpha y) + (\beta x', \beta y')$

$= (\underbrace{\alpha x + \beta x'}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\alpha y + \beta y'}_{\in \mathbb{R}}) \in \mathbb{R}^2$

لكي يكون $(\alpha X + \beta Y) \in F_1$ يجب أن يكون:

$2(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') = 0$??

$2(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y')$

$= 2\alpha x + 2\beta x' + \alpha y + \beta y'$

$= \alpha(\underbrace{2x + y}_{0}) + \beta(\underbrace{2x' + y'}_{0})$

$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0$

$= 0$

$\Rightarrow (\alpha X + \beta Y) \in F_1$

ومنه: F_1 ف.ش.ج من E.

2) $F_2 = \{(x,y) \in E / x + y = 1\}$

F_2 ليس ف.ش.ج من E لأن:

$0_E = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in \mathbb{R}^2 / 0 + 0 \neq 1$

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^2} \notin F_2$

3)

E ف.ش. على الحقل $\mathbb{K}$، يكون F ف.ش.جزئي من E إذا تحقق:

① $\emptyset \neq F \subset E$. $(0_E \in F)$

② * $\forall X, Y \in F : (X + Y) \in F$

* $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall X \in F : (\alpha X) \in F$

$F_3 = \{(x,y) \in E / x^2 - y = 0\}$.

F_3 ليس ف.ش.ج من E مثال مضاد:

$\exists X = (1,1) \in F_3$ $((1,1) \in \mathbb{R}^2 / 1^2 - 1 = 0$ لأن: $)$

$\exists Y = (-1,1) \in F_3$ $((-1,1) \in \mathbb{R}^2 / (-1)^2 - 1 = 0$ لأن: $)$

لكن: $X + Y = (1,1) + (-1,1) = (1-1, 1+1) = (0,2)$:

$(0,2) \in \mathbb{R}^2 / 0^2 - 2 = -2 \neq 0$

$\Rightarrow (0,2) \notin F_3$

أي: $(X+Y) \notin F_3$

② ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $P,\varphi\in F_8$

$P\in F_8 \Rightarrow P\in E / P(1)=P'(1)$.

$\varphi\in F_8 \Rightarrow \varphi\in E / \varphi(1)=\varphi'(1)$

$(\alpha P+\beta\varphi)\in E /$ (لأن: مجموع كثيري حدود هو كثير حدود وجداء عدد حقيقي في كثير حدود هو كثير حدود)

$$(\alpha P+\beta\varphi)(1)=(\alpha P)(1)+(\beta\varphi)(1)$$
$$=\alpha\cdot P(1)+\beta\cdot\varphi(1)$$
$$=\alpha\cdot P'(1)+\beta\cdot\varphi'(1)$$
$$=(\alpha P)'(1)+(\beta\varphi)'(1)$$
$$=(\alpha P+\beta\varphi)'(1)$$
$$\Rightarrow(\alpha P+\beta\varphi)\in F_8$$

ومنه: F_8 ف.ش.ج من E.

9) $F_9=\{P\in E / P(0)=P(2)\}$.

بنفس طريقة اثبات الحالة (8) نجد أن: F_9 كذلك ف.ش.ج من E.

$* E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

10) $F_{10}=\{f\in E / f \text{ فردية}\}$.

$=\{f\in E, x\in\mathbb{R} / f(-x)=-f(x)\}$.

$*$ ① $F_{10}\subset E$ (من تعريف المجموعة F_{10})

$*$

$0_E=0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}=0(x)$ الدالة المعدومة

$$0(x):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto 0(x)=0.$$

$0(x)\in E / 0(-x)=0$

$$0(x)=0\Rightarrow -0(x)=0$$
$$\Rightarrow 0(-x)=-0(x)=0.$$
$$\Rightarrow 0(x)\in F_{10}.\Rightarrow F_{10}\neq\emptyset.$$

② ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $f,g\in F_{10}$

$f\in F_{10}\Rightarrow f\in E / f(-x)=-f(x)$

$g\in F_{10}\Rightarrow g\in E / g(-x)=-f(x)$

$(\alpha f+\beta g)\in E /$

$$(\alpha f+\beta g)(-x)=(\alpha f)(-x)+(\beta g)(-x)$$
$$=\alpha\cdot f(-x)+\beta\cdot g(-x)$$
$$=-\alpha f(x)-\beta g(x)$$
$$=-(\alpha f(x)+\beta g(x))$$
$$=-((\alpha f)(x)+(\beta g)(x))$$
$$=-(\alpha f+\beta g)(x)$$
$$\Rightarrow(\alpha f+\beta g)\in F_{10}$$

ومنه: F_{10} ف.ش.ج من E.

11) $F_{11}=\{f\in E / f \text{ متزايدة}\}$.

F_{11} ليس ف.ش.ج من E لأن جداء دالة متزايدة بعدد حقيقي سالب ليس دالة متزايدة.

12) $F_{12}=\{f\in E / \forall x\in\mathbb{R}: f(x+1)=f(x)\}$.

بنفس طريقة اثبات الحالة (10) نجد أن: F_{12} كذلك ف.ش.ج من E.