جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر2
2020/2019

السلسلة رقم 03

التطبيقات الخطية

<u>التمرين 01</u>: ليكن التطبيقين:

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$$

$$g: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \mapsto g(x,y) = (2x-y, x-y)$$

1- بين أن f و g خطيين.

2- أوجد $\mathrm{Ker}f$، $\mathrm{Ker}g$، $\mathrm{Im}f$، $\mathrm{Im}g$، $\mathrm{rg}f$، $\mathrm{rg}g$.

3- هل f و g متباينين؟ غامرين؟

4- هل $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$ ؟

5- بين أنه: إذا كان $u \in \mathrm{Im}f$ فإن $f(u) = u$.

<u>التمرين 02</u>: ليكن $\{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$، $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ خطي بحيث:

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 + 2e_3, \; f(e_2) = 3e_1 + 4e_2, \; f(e_3) = -e_1$$

1) ليكن $a = (0,0,1)$، $b = (1,0,1)$، $c = (1,1,1)$، أوجد $f(a), f(b)$ و $f(c)$ دون حساب عبارة f.

2) اوجد عبارة $f(x,y,z)$.

3) تحقق أن الجملة $B' = \{a,b,c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

4) هل الجملة $B'' = \{f(a), f(b), f(c)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$؟

5) هل f تقابل؟

<u>التمرين 03</u>: ليكن $\mathbb{P}_1[X]$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة 1 أو أقل ذات معاملات حقيقية، نعرف التطبيق:

$$g: \quad \mathbb{P}_1[X] \to \mathbb{R}^2 \qquad P \mapsto g(P) = \big(P(-1), P(1)\big)$$

بين أن g خطي تقابلي.

جامعة محمد خيضر بسكرة
ك.ع.د.ع.ط.ح
قسم الرياضيات

السنة الاولى MI
مقياس: جبر2
2020/2019

السلسلة 03
التطبيقات الخطية

التمرين 01:

f تطبيق خطي اذا كان: $\forall \alpha,\beta\in \mathbb{K}, \forall X,Y\in E: f(\alpha X+\beta Y)=\alpha f(X)+\beta f(Y).$

$f:E\to F$ تطبيق خطي

$Ker f=\{X\in E,\ f(X)=0_F\}\subset E$

$Im f=\{Y\in F, \exists X\in E: Y=f(X)\}$
$=\{f(X)\in F, \exists X\in E\}\subset F$

$rg f=\dim Im f.$

$Ker f=\{0_E\} \Leftrightarrow$ f متباين

$Im f=F \Leftrightarrow$ f غامر

$f: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y)\mapsto f(x,y)=\left(\frac{x-y}{2},\frac{y-x}{2}\right)$$

$g: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y)\mapsto g(x,y)=(2x-y,x-y)$$

(*

1) نبين أن: f خطي:

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \forall X,Y\in\mathbb{R}^2: f(\alpha X+\beta Y)=\alpha f(X)+\beta f(Y)$ ؟

$f(\alpha X+\beta Y)=f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y')$

$=\left(\frac{(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y')}{2}, \frac{(\alpha y+\beta y')-(\alpha x+\beta x')}{2}\right)$

$=\left(\frac{\alpha(x-y)+\beta(x'-y')}{2}, \frac{\alpha(y-x)+\beta(y'-x')}{2}\right)$

$=\alpha\left(\frac{x-y}{2},\frac{y-x}{2}\right)+\beta\left(\frac{x'-y'}{2},\frac{y'-x'}{2}\right)$

$=\alpha\ f(X)\ +\beta f(Y)$

$\Leftarrow$ f خطي.

ب) ايجاد أساسا لكل من: $Ker f$ ، $Im f$:

$Ker f=\{X\in\mathbb{R}^2: f(X)=0_{\mathbb{R}^2}\}=\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2: f(x,y)=(0,0)\}$

$f(X)=0_{\mathbb{R}^2}\Rightarrow\left(\frac{x-y}{2},\frac{y-x}{2}\right)=(0,0)$

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{x-y}{2}=0\\ \frac{y-x}{2}=0\end{cases}\Rightarrow x=y.$

$Ker f=\{X\in\mathbb{R}^2: x=y\}.$

$X=(x,y)\in Ker f\Rightarrow (x,y)=(x,x)=x(1,1)$

$\Leftarrow (1,1)$ يولد $Ker f$ وهو مستقل خطيا فهو يشكل أساسا لـ $Ker f$ $\Leftarrow$ $\dim Ker f=1$

$Im f=\{Y\in\mathbb{R}^2, \exists X\in\mathbb{R}^2: f(X)=Y\}.$

$Y=(x',y')\in Im f\Rightarrow (x',y')=\left(\frac{x-y}{2},\frac{y-x}{2}\right)$
$=\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{-y}{2},\frac{y}{2}\right)$
$=\frac{x}{2}(1,-1)-\frac{y}{2}(1,-1)$
$=\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)(1,-1)$

$\Leftarrow (1,-1)$ يولد $Im f$ وهو مستقل خطيا فهو يشكل أساس لـ $Im f$ $\Leftarrow$ $\dim Im f=1$.

$rg f=\dim Im f=1$

3) هل $\mathbb{R}^2=Ker f\oplus Im f$ ؟

أي اثبات أن: $\begin{cases}1) Ker f\cap Im f=\{0_{\mathbb{R}^2}\}\\ 2) \mathbb{R}^2=Ker f+Im f.\end{cases}$

1) $Ker f\cap Im f=\{0_{\mathbb{R}^2}\}$? لدينا $\{0_{\mathbb{R}^2}\}\subset(Ker f\cap Im f)$

$X\in(Ker f\cap Im f)\Rightarrow\begin{cases}X\in Ker f\\ \wedge\\ X\in Im f\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\exists\alpha\in\mathbb{R}: X=\alpha\binom{1}{1}\\ \wedge\\ \exists\beta\in\mathbb{R}: X=\beta\binom{1}{-1}\end{cases}$

$\Rightarrow\binom{x}{y}=\binom{\alpha}{\alpha}=\binom{\beta}{-\beta}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\beta\\ \alpha=-\beta\end{cases}\Rightarrow\beta=-\beta\Rightarrow 2\beta=0$
$\Rightarrow\beta=0\Rightarrow\alpha=0.$
$\Rightarrow X=(0,0)\Rightarrow Ker f\cap Im f=\{0_{\mathbb{R}^2}\}.$

2) $\mathbb{R}^2=Ker f+Im f$ ؟!

$(Ker f+Im f)\subset\mathbb{R}^2$

$\dim(Ker f+Im f)=\dim Ker+\dim Im f-\dim(Ker f\cap Im f)$
$=1+1-0=2=\dim\mathbb{R}^2$
$\Rightarrow\mathbb{R}^2=Ker f+Im f$

ومنه: $\mathbb{R}^2=Ker f\oplus Im f$

4) نبين أنه اذا كان $u\in Im f$ فإن: $f(u)=u$ ؟

$u\in Im f\Rightarrow f(u)=u$?

$u\in Im f\Rightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R}: u=\alpha(1,-1)=(\alpha,-\alpha).$

$f(u)=f(\alpha,-\alpha)=\left(\frac{\alpha-(-\alpha)}{2},\frac{-\alpha-\alpha}{2}\right)=\left(\frac{2\alpha}{2},-\frac{2\alpha}{2}\right)=(\alpha,-\alpha).$

(*

بنفس الطريقة نثبت أن التطبيق g خطي.

$Ker g=\{X\in\mathbb{R}^2: g(X)=0_{\mathbb{R}^2}\}$

$g(X)=0_{\mathbb{R}^2}\Rightarrow(2x-y,x-y)=(0,0)$

$\Rightarrow\begin{cases}2x-y=0\\ x-y=0\end{cases}\Rightarrow y=x.$

$(1)\Rightarrow 2x-x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow y=0.$

$\Rightarrow Ker g=\{0_{\mathbb{R}^2}\}\Rightarrow$ g متباين

$Im g=\{Y\in\mathbb{R}^2: \exists X\in\mathbb{R}^2: g(X)=Y\}.$

$Y=(x',y')\in Im g\Rightarrow Y=(x',y')=(2x-y,x-y)$
$=(2x,x)\ (-y,y)=x(2,1)$

$Im g=\langle\{\binom{2}{1},\binom{1}{1}\}\rangle\Leftarrow$ $(2,1)$ ، $(1,1)$ يولدان $Im g$ $\Leftarrow$

دراسة الاستقلال الخطي لهذين الشعاعين :

$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} : \alpha(2,1)+\beta(1,1)=(0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=0 \\ \alpha+\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta .$

$① \Rightarrow 2\alpha+\alpha=0 \Rightarrow 3\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow \beta=0$

ومنه: هذين الشعاعين $\binom{2}{1}$ ، $\binom{1}{1}$ مستقلان خطيا فهما يشكلان أساس لـ $Im\,g \Rightarrow rg\,g=\dim Im\,g=2$

$\left.\begin{matrix} Im\,g \subset \mathbb{R}^2 \\ \dim Im\,g = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Im\,g=\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ g غامر

التمرين 02: ليكن $\{e_1,e_2,e_3\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.

$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ خطي بحيث

$f(e_1)=2e_1+e_2+2e_3 .$

$f(e_2)=3e_1+4e_2 .$

$f(e_3)=-e_1 .$

1) ليكن $a=(0,0,1)$ ، $b=(1,0,1)$ ، $c=(1,1,1)$ ،
إيجاد $f(a)$ ، $f(b)$ ، $f(c)$ دون حساب عبارة f :
$\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.
نعلم أن:

$\forall X=(x,y,z)=xe_1+ye_2+ze_3 .$

$\Rightarrow a=(0,0,1)=0.e_1+0.e_2+1.e_3 .$

$\Rightarrow f(a)=f(0,0,1)=f(0e_1+0e_2+1e_3)$ (لأن f تطبيق خطي)

$=0f(e_1)+0f(e_2)+1f(e_3)$

$=f(e_3)=-e_1=(-1,0,0)$

$f(b)=f(1,0,1)=f(1e_1+0e_2+1e_3)$

$=1f(e_1)+0f(e_2)+1f(e_3)$

$=f(e_1)+f(e_3)=2e_1+e_2+2e_3-e_1$

$=e_1+e_2+2e_3=(1,1,2)$

$f(c)=f(1,1,1)=f(1.e_1+1e_2+1e_3)$

$=f(e_1)+f(e_2)+f(e_3)$

$=2e_1+e_2+2e_3+3e_1+4e_2-e_1$

$=4e_1+5e_2+2e_3=(4,5,2).$

2) إيجاد عبارة $f(x,y,z)$:

بما أن $\{e_1,e_2,e_3\}$ أساس قانوني لـ $\mathbb{R}^3$ فإن:

$\forall X\in\mathbb{R}^3, \exists x,y,z\in\mathbb{R} : X=xe_1+ye_2+ze_3 .$

اذن نعين:

$f(x,y,z)=f(xe_1+ye_2+ze_3)$

$f(x,y,z)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)$ (لأن f تطبيق خطي)

$=x(2e_1+e_2+2e_3)+y(3e_1+4e_2)+z\cdot(-e_1)$

$=(2x+3y-z)e_1+(x+4y)e_2+(2x)e_3 .$

$=(2x+3y-z, x+4y, 2x)$

3) التحقق أن الجملة $B'=\{a,b,c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$:

لدينا: $card\,B'=3$ و $\dim\mathbb{R}^3=3$

اذن: يكفي أن نبين أن الجملة B' مستقلة خطيا.

ليكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ بحيث:

$\alpha a+\beta b+\gamma c=0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow \alpha(0,0,1)+\beta(1,0,1)+\gamma(1,1,1)=(0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \beta+\gamma=0 & —— ① \\ \gamma=0 & —— ② \\ \alpha+\beta+\gamma=0 & —— ③ \end{cases}$

$② \Rightarrow \gamma=0$

$① \Rightarrow \beta=-\gamma=0 .$

$③ \Rightarrow \alpha=-\beta-\gamma=0 .$

اذن: الجملة B' مستقلة خطيا فهي تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

4) هل الجملة $B''=\{f(a),f(b),f(c)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$ ؟

مما سبق لدينا:

$B''=\{\overset{f(a)}{(-1,0,0)},\overset{f(b)}{(1,1,2)},\overset{f(c)}{(4,5,2)}\}.$

لدينا: $card\,B''=3$ و $\dim\mathbb{R}^3=3$

اذن: يكفي أن نبين أن الجملة B'' مستقلة خطيا.

ليكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ بحيث:

$\alpha(-1,0,0)+\beta(1,1,2)+\gamma(4,5,2)=(0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha+\beta+4\gamma=0 & —— (1) \\ \beta+5\gamma=0 & —— (2) \\ 2\beta+2\gamma=0 & —— (3) \end{cases}$

$② \Rightarrow \beta=-5\gamma .$

$① \Rightarrow -\alpha-5\gamma+4\gamma=0.$

$\Rightarrow -\alpha-\gamma=0 \Rightarrow \alpha=-\gamma .$

$① \Rightarrow -\gamma-5\gamma+4\gamma=0$

$\Rightarrow -2\gamma=0 \Rightarrow \gamma=0 .$

$\Rightarrow \alpha=0$

$\Rightarrow \beta=0$

اذن: الجملة B'' مستقلة خطيا فهي تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

5) هل f تقابل ؟

نظرية:

$f:E\longrightarrow F$ خطي، $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ أساس لـ E
f تقابل $\Leftrightarrow$ $\{f(e_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ أساس لـ F

لدينا: $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ خطي، و $B'=\{a,b,c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$

بما أن: $B''=\{f(a),f(b),f(c)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$

حسب النظرية السابقة: f تقابل.

التمرين 03:

تبيين أن: g خطي

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، $P, Q \in \mathbb{P}_1[X]$.

$$g(\alpha P+\beta Q) = \big((\alpha P+\beta Q)(-1), (\alpha P+\beta Q)(1)\big)$$
$$= \big((\alpha P)(-1)+(\beta Q)(-1), (\alpha P)(1)+(\beta Q)(1)\big)$$
$$= \big(\alpha \cdot P(-1)+\beta Q(-1), \alpha \cdot P(1)+\beta \cdot Q(1)\big)$$
$$= \big(\alpha \cdot P(-1), \alpha \cdot P(1)\big)+\big(\beta Q(-1), \beta Q(1)\big)$$
$$= \alpha\big(P(-1), P(1)\big)+\beta\big(Q(-1), Q(1)\big)$$
$$= \alpha\, g(P)+\beta\, g(Q).$$

إذن: g خطي .

إثبات أن: g تقابلي :

$$\ker g = \{P \in \mathbb{P}_1[X] : g(P) = 0_{\mathbb{R}^2}\}.$$
$$= \{P = (aX+b) \in \mathbb{P}_1[X] : g(P) = (0,0)\}.$$

$$g(P) = (0,0) \Rightarrow \big(P(-1), P(1)\big) = (0,0)$$
$$\Rightarrow (-a+b, a+b) = (0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -a+b=0 & (1) \\ a+b=0 & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow b=0.$

$(1) \Rightarrow a=0.$

$\Rightarrow P=0$

إذن: $\ker g = \{0_{\mathbb{P}_1[X]}\}$ ومنه: g متباين .

$$\mathrm{Im}\, g = \{Y \in \mathbb{R}^2, \exists P \in \mathbb{P}_1[X] : Y = g(P)\}$$
$$= \{Y = (x', y') \in \mathbb{R}^2, \exists P \in \mathbb{P}_1[X] : (x', y') = g(P)\}.$$

$$Y \in \mathrm{Im}\, g \Rightarrow Y = (x', y') = g(P) = \big(P(-1), P(1)\big).$$
$$= (-a+b, a+b) = (-a, a)+(b, b)$$
$$= a(-1,1)+b(1,1).$$

$(-1,1)$، $(1,1)$ يولدان $\mathrm{Im}\, g$، بعد دراسة الاستقلال الخطي لهما نجدهما مستقلان خطيا فهما يشكلان أساس لـ $\mathrm{Im}\, g$

إذن: $\dim \mathrm{Im}\, g = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Im}\, g \subset \mathbb{R}^2 \\ \dim \mathrm{Im}\, g = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}^2$$

إذن: g غامر

ومنه: g تقابلي .