**La suite de cour Algèbre (Département Génie civil et hydraulique)**

**2.3. Règles de calcul**

**Proposition :**

Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Soient u ∈ E et λ ∈ K. Alors on a :

1. 0· u = 0E

2. λ·0E = 0E

3. (−1)· u = −u

4. λ· u = 0E ⇐⇒ λ = 0 ou u = 0E

L’opération qui à (u,v) associe u+(−v) s’appelle la soustraction. Le vecteur u+(−v) est noté u−v. Les propriétés suivantes sont satisfaites : λ(u − v) = λu −λv et (λ−µ)u = λu −µu.

**3. Sous-espace vectoriel**

Il est vite fatiguant de vérifier les 8 axiomes qui font d’un ensemble un espace vectoriel. Heureusement, il existe une manière rapide et efficace de prouver qu’un ensemble est un espace vectoriel : grâce à la notion de sous-espace vectoriel.

**3.1. Définition d’un sous-espace vectoriel :**

**Définition**

Soit E un K-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée un sous-espace vectoriel si :

– 0E ∈ F,

– u + v ∈ F pour tous u,v ∈ F,

– λ· u ∈ F pour tout λ ∈ K et tout u ∈ F.

Remarque Expliquons chaque condition.

– La première condition signifie que le vecteur nul de E doit aussi être dans F. En fait il suffit même de prouver que F est non vide.

– La deuxième condition, c’est dire que F est stable pour l’addition : la somme u + v de deux vecteurs u,v de F est bien sûr un vecteur de E (car E est un espace vectoriel), mais ici on exige que u + v soit un élément de F.

– La troisième condition, c’est dire que F est stable pour la multiplication par un scalaire.

**Exemple 01 :**

1. L’ensemble F = {(x, y) ∈ R2 | x+ y = 0} est un sous-espace vectoriel de R 2. En effet :

(a) (0,0) ∈ F,

(b) si u = (x1, y1) et v = (x2, y2) appartiennent à F, alors x1 + y1 = 0 et x2 + y2 = 0 donc (x1 + x2)+(y1 + y2) = 0 et ainsi u + v = (x1 + x2, y1 + y2) appartient à F,

(c) si u = (x, y) ∈ F et λ ∈ R, alors x+ y = 0 donc λx+λy = 0, d’où λu ∈ F.

2. L’ensemble des fonctions continues sur R est un sous-espace vectoriel de l’espace vectoriel des fonctions de R dans R.

Preuve : la fonction nulle est continue ; la somme de deux fonctions continues est continue ; une constante fois une fonction continue est une fonction continue.

**Exemple 02 :**

Voici des sous-ensembles qui ne sont pas des sous-espaces vectoriels.

1. L’ensemble F1 = { (x, y) ∈ R2 | x+ y = 2 } n’est pas un sous-espace vectoriel de R2 . En effet le vecteur nul (0,0) n’appartient pas à F1.

2. L’ensemble F2 = { (x, y) ∈ R2 | x = 0 ou y = 0 } n’est pas un sous-espace vectoriel de R2 . En effet les vecteurs u = (1,0) et v = (0,1) appartiennent à F2, mais pas le vecteur u + v = (1,1).

3. L’ensemble F3 = { (x, y) ∈ R2 | x ≥ 0 et y ≥ 0} n’est pas un sous-espace vectoriel de R2 . En effet le vecteur u = (1,1) appartient à F3 mais, pour λ = −1, le vecteur −u = (−1,−1) n’appartient pas à F3.

**Corollaire**

Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E (F ⊂ E).

Si F vérifie les propriétés (1) et (2) suivantes alors F est un sous-espace vectoriel de E :

(1) F est non vide (F contient l’élément neutre de E).

(2) ∀(x, y) ∈ F × F, ∀(λ, µ) ∈ K × K, alors λx + µy ∈ F.

**Proposition**

Soient E un espace vectoriel et E1, . . . , En des sous-espaces vectoriels de E, alors l’intersection F = **∩nk=1** Ei est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve:

Pour tout i, on a 0 ∈ Ei , donc 0 ∈ F. Soient x, y ∈ F et λ ∈ K alors pour tout i, on a λx + µy ∈ Ei donc λx + µy est dans l’intersection de tout les Ei .

**Remarque**

La réunion de deux sous-espace vectoriels n’est pas en général un sous-espace vectoriel. En effet, si E = R2 , les sous-ensembles E1 = {(x, y) ∈ R2 | x + y = 0} et E2 = {(x, y) ∈ R2 | x − y = 0} sont deux sous-espaces vectoriels de R2 mais E1 ∪ E2 n’est pas un sous-espace vectoriel (par exemple, soient x, y ∈ R∗ , on a (x, −x) ∈ E1 et (y, y) ∈ E2 mais (x, −x) + (y, y) n’appartient ni à E1 ni à E2).

**3.2. Combinaisons linéaires**

Soit {x1, . . . , xp} une famille de vecteurs d’un espace vectoriel E. Tout vecteur de E de la forme a1x1 +. . . apxp = akxk, où les ak ∈ R est appelé combinaison linéaire des vecteurs xk, k = 1 . . . , p.

**Remarque**

On peut généraliser cette notion à une famille infinie de vecteurs, mais dans ce cas il faut que la suite des scalaires soit à support fini.

**2.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie d’un espace vectoriel**

Soit A un sous-ensemble non-vide de l’espace vectoriel E.

On note vect(A), l’ensemble des combinaisons linéaires d’éléments de A.

On a donc vect(A) = { λaa | (λa) est une famille de scalaires à support fini}. Donc un élément x de E appartient à vect(A), si et seulement si, il existe x1, . . . , xn ∈ A et des scalaires λ1, . . . , λn, tels que : x = λ1x1 + · · · + λnxn.

**Théorème**

Soit A une partie d’un espace vectoriel E. vect(A) est l’unique sous-espace vectoriel de E vérifiant :

(1) A ⊂ vect(A),

(2) vect(A) est inclus dans tout sous-espaces vectoriels contenant A. Le sous-espace vectoriel vect(A) se comprend comme étant le plus petit sous-espace vectoriel contenant A, on l’appelle espace vectoriel engendré par A.

* **Corollaire** vect(A) est l’intersection de tous les sous-espaces vectoriel de E contenant A.
* **Corollaire** A est un sous-espace vectoriel, si et seulement si, vect(A) = A.

**Exemple**

(1) vect{ensemble vide} = {0} car l’espace nul est le plus petit sous-espace vectoriel de E.

(2) vect(E) = E car vectE est le plus petit sous-espace vectoriel contenant E.

(3) Soit A = {u}. Montrons que vect{u} = {λu | λ ∈ K} = Ku. Puisque u ∈ A ⊂ vect(A) et puisque vect(A) est un sous-espace vectoriel on a λu ∈ vect(A), pour tout λ ∈ K. Ainsi Ku ⊂ vect{u}. Par double inclusion on obtient Ku = vect{u}.

(4) Soit A = {u, v}. Par double inclusion, on montre comme ci-desus que vect{u, v} = {λu + µv | λ, µ ∈ K} = Ku + Kv.

**Proposition**

Si A et B deux parties de E alors A ⊂ B =⇒ vect(B) ⊂ vect(A).

**Preuve**: Supposons que A ⊂ B. On a alors A ⊂ vect(B) or vect(B) est un sous-espace vectoriel donc vect(A) ⊂ vect(B).

**Proposition** Si A et B sont deux parties de E alors vect(A∪B) = vect(A)+ vect(B).

**Exemple**  Pour F et G deux sous-espaces vectoriels de E. vect(F∪G) = F+G.

Ainsi F +G apparait comme étant le plus patit sous-espace vectoriel contenant F et G.

**Applications linéaires**

**Définition**

Soient (E, +, .) et (F, .+) deux K-espaces vectoriels. On dit que f : E → F est linéaire (ou est un morphisme d’espace vectoriel) si :

(1) ∀x, y ∈ E, on a f(x + y) = f(x) + f(y);

(2) ∀λ ∈ K, ∀x ∈ E, on a f(λx) = λf(x).

On note L(E, F) l’ensemble des applications de E dans F.

**Proposition [Caractérisation usuelle des applications linéaires] :**

Soit f : E → F. L’application f est linéaire, si et seulement si , ∀λ, µ ∈ K, ∀x, y ∈ E, f(λx + µy) = λf(x) + µf(y).

**Exemple**  Soit f : E → F définie par f : x → 0F. L’application f est linéaire.

**Proposition**

Soient E, E1, . . . En, (n ∈ N∗ ) des κ espaces vectoriels.

L’application f : E → E1 × · · · × En

x → (f1(x), . . . , fn(x)).

f est linéaire de E dans E1 × · · · × En, si et seulement si, f1, . . . , fn sont des applications linéaires de respectivement de E dans E1, . . . , de E dans En.

**Exemple**

Montrons que f : R2 → R3 définie par f(x, y) = (x + y, x − y, 2y) est une application linéaire.

Soient λ, µ ∈ R, et a = (x, y), b = (x ′ , y′ ) ∈ R2 ,

f(λa + µb) = f(λx + µx′ , λy + µy′ )

= (λx + µx′ + λy + µy′ , λx + µx′ − λy + µy′ , 2λy + 2µy′ )

= λ(x + y, x − y, 2y) + µ(x ′ + y ′ , x′ − y ′ , 2y ′ )

**= λf(a) + µf(b).**

**Proposition**

Soient (E, +, .), (F, +, .), (G, +, .) des K- espaces vectoriels.

**(1)** Si l’application f : E → F est linéaire alors f(0E) = 0F ;

**(2)** Si f : E → F et g : F → G sont linéaires alors g ◦ f : E → G est linéaire.

**(3)** Si e1, . . . en sont des vecteurs de E alors ∀λ1, . . . , λn ∈ K, f() akek = f() ak f(ek)

**1. Applications linéaires particulières**

**Formes linéaires**

**Définition**

On appelle forme linéaire sur un K-espace vectoriel E, toute application linéaire de E dans K. On note E∗ , au lieu de L(E, K), l’ensemble des formes linéaires sur E.

**Exemple**

Pour a1, . . . , an ∈ K fixé, l’application f : Kn → K définie par f : (x1, . . . , xn) → a1x1 + · · · + anxn est une forme linéaire sur Kn . En effet, c’est une application de Kn vers K et c’est aussi une application linéaire car on vérifie aisement que ∀ λ, µ ∈ K, ∀ x, y ∈ Kn , on a f(λx + µy) = λf(x) + µf(y).

* **Endomorphisme**

**Définition**

On appelle endomorphisme de E, toute application linéaire de E dans lui même. On note L(E), au lieu de L(E, E), l’ensemble des endomorphismes de E.

**Exemple** L’application identité IdE : E → E est un endomorphisme de E.

**Proposition**

Si f et g deux endomorphismes de E, alors f ◦ g est aussi un endomorphisme de E.

* **Isomorphisme**

**Définition**

On appelle isomorphisme d’un K espace vectoriel E vers un K espace vectoriel F toute application linéaire bijective de E vers F. On note Iso(E, F) l’ensemble des isomorphismes de E dans F.

**Exemple** L’application f : R2 → C définie par f(a, b) = a + ib est un isomorphisme de R-espace vectoriel. En effet, cette application est R-linéaire et bijective.

**Proposition** Si f : E → F et g : F → G sont des isomorphismes alors la composée g ◦ f : f → G est un isomorphisme.

**Proposition**  Si f : E → F est un isomorphisme alors son application réciproque f −1 : F → E est un isomorphisme.

**Proposition** Si f : E → F et g : F → G sont des automorphismes alors la composée g ◦ f : f → G est un automorphisme.

**Proposition** Si f : E → F est un automorphisme alors son application réciproque f −1 : F → E est un automorphisme.

* **Automorphisme**

**Définition**

On appelle automorphisme de E, toute application linéaire bijective de E.

On note **Gl(E)** l’ensemble d’automorphisme de E.

**Proposition** Si f : E → F et g : F → G sont des automorphismes alors la composée g ◦ f : f → G est un automorphisme.

**Proposition** Si f : E → F est un automorphisme alors son application réciproque f −1 : F → E est un automorphisme.

**2. Noyau et image d’une application linéaire**

**Théorème**

Soit f : E → F une application linéaire. Si V est une sous-espace vectoriel de E alors f(V) est un sous-espace vectoriel de F. Si W est un sous-espace vectoriel de F alors f −1 (W) est un sous-espace vectoriel de E.

**Définition**

Soit f : E → F une application linéaire.

(1) On appelle image de f l’espace Im f = f(E).

(2) On appelle noyau de f l’espace ker f = f −1 ({0}).

**Proposition**

(1) Im f est un sous-espace vectoriel de F.

(2) ker f est un sous-espace vectoriel de E.

**Remarque**

(1) Pour déterminer l’image d’une application linéaire f, on détermine les valeurs prises par f, i.e., les y ∈ F tels qu’il existe x ∈ E pour lequel y = f(x).

(2) Pour déterminer le noyau d’une application linéaire f, on résout l’equation f(x) = 0F d’inconnue x ∈ E.

**Exemple**

Déterminons le noyau et l’image de l’application linéaire f : R2 → R2 définie par :

f : (x, y) → (x − y, x + y). Soit a = (x, y) ∈ R2 . ..... ker f = {x, x) | x ∈ R}

Im f = {(x, −x) | x ∈ R}.

**Théorème**

Si f : E → F est une application linéaire alors

(1) f est surjective, si et seulement si, Im f = F

(2) f est injective, si et seulement si, ker f = {0E}.

**2.1. Application Linéaire sur des espaces de dimension finies**

**Proposition**

Soit E et F deux IK-espace vectoriels et f, g deux applications linéaires de E dans F. Si E est de dimension finie n et {e1, e2, ..., en} une base de E, alors ∀k ∈ {1, 2, .., n}, f(ek) = g(ek) ⇔ ∀x ∈ E, f(x) = g(x).

**preuve**

L’implication (⇐) est evidente.

Pour (⇒) on a E est engendré par {e1, e2, ..., en}, donc ∀x ∈ E, ∃λ1, λ2, ..., λn ∈ IK, x = λ1e1 + λ2e2 + ... + λnen, comme f et g sont linéaires, alors f(x) = f(λ1e1 + λ2e2 + ... + λnen) = λ1f(e1) + λ2f(e2) + ... + λnf(en), g(x) = g(λ1e1 + λ2e2 + ... + λnen) = λ1g(e1) + λ2g(e2) + ... + λng(en), donc si on suppose que ∀k ∈ {1, 2, .., n}, f(ek) = g(ek) donc on déduit que ∀x ∈ E, f(x) = g(x).

**Remarque**

Pour que deux applications linéaires f et g de E dans F soient égales il suffit qu’elles coincident sur la base du IK− espace vectoriel E.

**Exemple**

Soit g une application de IR2 dans IR2 telle que g(1, 0) = (2, 1), g(0, 1) = (−1, −1) alors déterminons la valeur de g en tous points de IR2 , en effet on a : ∀(x, y) ∈ IR2 ,(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) g(x, y) = g(x(1, 0)+y(0, 1)) = xg(1, 0)+yg(0, 1) = x(2, 1)+y(−1, −1) = (2x−y, x−y) ainsi g(x, y) = (2x − y, x − y).

**Théorème**

Soit f une application linéaire de E dans F avec dimension de E est finie, on a :

dimE = dim ker f + dim Im(f)

**Exemple**

On a montré que dim ker f1 = 1 avec f1 définie

f1 : IR2 → IR

(x, y) → x + 2y

comme dimIR2 = 2 ⇒ dim Im(f) = dim IR2 − dim ker f1 = 2 − 1 = 1.

**Proposition**

Soit f une application linéaire de E dans F avec dimE = dimF = n. On a alors les équivalences suivantes : f est isomorphisme ⇔ f est surjective ⇔ f est injective ⇔ dim Im(f) = dim F ⇔ Im f = F ⇔

dim ker f = 0 ⇔ ker f = {0E}, de cette proposition, on déduit que si f est un isomorphisme de E dans F avec dim E finie alors nécessairement dimE = dimF en d’autres termes si dimE ≠ dimF alors f ne peut être un isomorphisme.

**Exemple**

(1) L’application f1 n’est pas un isomorphisme car dim IR2 ≠ dim IR.

(2) Soit g(x, y) = (2x−y, x−y), g définie de IR2 dans IR2 on a,

Dim IR2 = dim IR2 est un isomorphisme car dim ker g = 0 en effet : ker g = {(x, y) ∈ IR2 /(2x − y, x − y) = (0, 0)} = {(0, 0)}, c’est même un automorphisme.