تمارين السداسي الثاني

الفصل الأول

المصفوفة $Matrices$

1.1 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 1*

تمرين رقم – 1 –Exercise N°

لتكن

Let

$$A=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & -4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -3\end{pmatrix}, D=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

و

and

$$E=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\\ -8 & 6\end{pmatrix}.$$

A) أحسب كل المجاميع الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات.

Calculate all possible sums of two of these matrices.

B) أحسب كل الجداءات الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات.

Calculate all possible products of two of these matrices.

C) أحسب $3A+2E$ و $5B+4EA^T$.

Calculate $3A+2E$ *and* $5B+4EA^T$.

D) أوجد α حيث $A-\alpha E$ المصفوفة المعدومة.

Find α *where* $A-\alpha E$ *is the null matrix.*

الحل - Solution

A) المجاميع الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات هي

The possible sums of two of these matrices are

$$A+E=\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -3 & -1\\ -7 & 2\end{pmatrix}$$

باقي المجاميع غير ممكنة.

Other combinations are not possible.

B) الجداءات غير الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات هي:

The non-possible products of two of these matrices are:

$$AB, AC, CA, DA, AE, EA, CB, BD, DB, EB, CD, DC, CE, EC, DE$$

و الجداءات الممكنة هي:

The possible products are:

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -12\\ -13 & -3\\ -20 & 0\end{pmatrix}$$

$$AD=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & -2\end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$BE = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & 20 \\ -15 & 10 \\ -11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$ED = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(C

$$3A + 2E = \begin{pmatrix} -19 & 10 \\ -6 & -3 \\ -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$5B + 4EA^T = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -13 \\ 94 & 15 & -7 \\ 287 & -14 & -123 \end{pmatrix}.$$

(D لا يوجد α حيث

There is no α where

$$A - \alpha E = \begin{pmatrix} -\alpha - 7 & 2 - 2\alpha \\ 3\alpha & -1 \\ 8\alpha + 1 & -6\alpha - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

لأن $0 \neq -1$.

because $0 \neq -1$.

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

.

1) أحسب الجدائين AB و BA عندما يكون معرف، في كل من الحالات التالية:

Calculate the product AB and BA when is defined, in each of the following cases:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}\ (a$$

$$A=\begin{pmatrix}0&3&6\\-2&0&0\\2&1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\ (b$$

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\1&1\\0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\0&1&0&2\end{pmatrix}\ (c$$

2) أحسب منقول المصفوفات السابقة.

Calculate the transpose of the previous matrices.

Solution : الحـــل

1) حساب الجداءات الممكنة:

Calculation of possible product:

- نظرا لأن A و B مصفوفتان مربعتان من نفس الرتبة، فإن الجدائين AB و BA ممكنان. و نجد:

Since A and B are square matrices of the same order, the product AB and BA are possible and we find:

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

على وجه الخصوص، $AB=BA=0$ بينما لا المصفوفة A ولا B معدومة.

In particular, $AB=BA=0$ while neither the matrix A nor B is zero.

- الجداء AB غير معرف لأن A يحتوي على ثلاثة أعمدة و B على سطرين. لذا نجد

The product of AB is undefined because A has three columns and B has two rows. So we find

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

- الجداء BA غير معرف لكن من ناحية أخرى، لدينا

The product BA is undefined but on the other hand, we have

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) حساب منقول المصفوفات السابقة:

Calculation of transpose of the past matrices:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = B \quad (a$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (b$$

$$.A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (c$$

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

لتكن $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$ المصفوفة المعرفة بـ:

Let $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$ be the matrix defined by:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

قارن بين المصفوفتين $(A+B)^2$ **و** $A^2+2AB+B^2$. **ثم قارن بين المصفوفتين** $(A+B)^2$ **و** $A^2+AB+BA+B^2$.

Compare the two matrices $(A+B)^2$ with $A^2+2AB+B^2$. Then compare the two matrices $(A+B)^2$ with $A^2+AB+BA+B^2$.

الحــل : Solution

نجري الحسابات المختلفة فنجد

We make various calculations and find out

$$(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

و

and

$$A^2+2AB+B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

وبالتالي، نلاحظ أن $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ **خطأ بالنسبة للمصفوفات. من ناحية أخرى، المساواة** $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$ **التي أثبتناها بالتوزيع المزدوج، صحيحة لجميع المصفوفات المربعة** A **و** B.

So we can see that $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ is false for matrices. On the other hand, the equality $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$, which we prove by double distribution, is true for all square matrices A and B.

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

لتكن

Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

أوجد كل المصفوفات

Find all matrices

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

التي يمكنها أن تتبادل مع A، يعني $AB = BA$.

which can be exchanged with A, i.e. $AB = BA$.

Solution : الحــل

We have لدينا

$$AB = \begin{pmatrix} c+e & d+f \\ e & f \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} c & c+d \\ e & e+f \end{pmatrix}.$$

because we assume $AB = BA$, we get the system: لأننا فرضنا $AB = BA$ نتحصل على الجملة :

$$\begin{cases} c+e &= c \\ d+f &= c+d \\ f &= e+f \end{cases}$$

بحل الجملة نجد $e = 0$ و $c = f$. ومنه كل المصفوفات B فهي من الشكل :

Solving the system, we find $e = 0$ and $c = f$ then, all the matrices B are of the form:

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

لتكن a و b أعداد حقيقية غير معدومة و المصفوفة

Let aandb be non-zero real numbers and the matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

أوجد كل المصفوفات $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي يمكنها أن تتبادل مع A، أي $AB = BA$.

Find all the matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ that can interchange with A, i.e. $AB = BA$.

Solution : الحــل

Let لتكن

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

then, we have ومنه لدينا

$$AB = \begin{pmatrix} ac+be & ad+bf \\ ae & af \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} ac & bc+ad \\ ae & be+af \end{pmatrix}.$$

لأننا فرضنا $AB = BA$ نتحصل على الجملة :

because we assume $AB = BA$, we get the system:

$$\begin{cases} ac + be &= ac \\ ad + bf &= bc + ad \\ af &= be + af \end{cases}$$

بحل الجملة نجد $e = 0$ و $c = f$. ومنه كل المصفوفات B فهي من الشكل :

Solving the system, we find $e = 0$ and $c = f$, and then, all the matrices B are at the form:

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

أجد A و B من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ حيث : $AB = 0$ و $BA \neq 0$.

Find A and B from $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ where: $AB = 0$ and $BA \neq 0$.

Solution : الحــل

مثلا من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $a \neq 0$ و $b \neq 0$ فإن:

For example, for each non-zero real number $a \neq 0$ and $b \neq 0$, then:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Note that **نلاحظ أن**

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and **و**

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

لتكن المصفوفة

Let the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

1) هل توجد مصفوفة $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ حيث $AB = I_3$؟ إن كان الجواب بنعم، هات صيغة المصفوفة B.
Is there a matrix $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ where $AB = I_3$? If yes, give the matrix formula of B.

2) هل توجد مصفوفة $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ حيث $CA = I_2$؟ إن كان الجواب بنعم، هات صيغة المصفوفة C.
Is there a matrix $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ where $CA = I_2$? If yes, give the matrix formula of C.

Solution : الحـــل

لتكن $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ تكتب على الشكل التالي:

Let $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ be written in the following form:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

ومنه الجداء AB يساوي

So the product of AB is equal to

$$AB = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \end{pmatrix}.$$

إذا كان لدينا $AB = I_3$، فسنحصل على وجه الخصوص على $d = 1$ و $a = 0$ و $a + d = 0$. وهي مستحيلة.

In particular, if we have $AB = I_3$, we get $d = 1$, $a = 0$, and $a + d = 0$. It is impossible.

لتكن $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ تكتب على الشكل التالي:

Let $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ be written in the following form:

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

So the product of CA is equal to

ومنه الجداء CA يساوي:

$$CA = \begin{pmatrix} b+c & a+c \\ e+f & d+f \end{pmatrix}.$$

لدينا $CA = I_2$ إذا وفقط إذا كان:

We have $CA = I_2$ if and only if:

$$\begin{cases} b+c &= 1 \\ a+c &= 0 \\ e+f &= 0 \\ d+f &= 1 \end{cases}$$

the solution of the system is

حل الجملة هو:

$$\begin{cases} a &= -c \\ b &= 1-c \\ e &= -f \\ d &= 1-f \end{cases}$$

لذلك يمكن أن نجد مصفوفة مناسبة C، على سبيل المثال:

So we can find a suitable matrix C, for example:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercise N°– 8 – تمرين رقم

Let the following matrices as:

لتكن المصفوفات التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) أحسب A^2، A^3. ثم إستنتج من A^n من أجل كل $n \geq 1$.
Calculate A^2, A^3. Then deduce from A^n for every $n \geq 1$.

2) أجب على نفس السؤال من أجل المصفوفة B.
Answer the same question for the matrix B.

Solution : الحــل

سنبدأ بحساب الحدود الأولى لـ A^n لمحاولة تخمين الصيغة النهائية. لدينا

We'll start by calculating the first terms of A^n to try to guess the final formula. we've got

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

ثم نثبت بالتراجع أن من أجل $n \geq 1$:

Then we prove by induction that for $n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

إن الإثبات بالتراجع بسيط للغاية، ويعتمد ببساطة على $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$

The induction proof is very simple, it simply depends on $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$

نفعل الشيء نفسه بالنسبة لـ B:

We do the same for B:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

ثم نثبت بالتراجع أن من أجل $n \geq 1$:

Then we prove by induction that for $n \geq 1$:

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercise N°– 9 – تمرين رقم

أحسب بإستعمال طريقة غوص ثم طريقة المصفوفة المرافقة، مقلوب المصفوفة

Calculate using the submerged method and then the conjugate matrix method, the inverse of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution - الحــل

1) حساب مقلوب المصفوفة A باستعمال طريقة غوص، المصفوفة المعززة:

Calculating the inverse of the matrix A using the Gauss method. The augmented matrix is:

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

نجعل 0 يظهر في العمود الأول:

We make 0 appear in the first column:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{array}$$

then ثم

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow \frac{-1}{4} L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \end{array}$$

and finally و في الأخير

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \end{array}$$

وبالتالي، فإن مقلوب المصفوفة A هو المصفوفة التي تم الحصول عليها على اليمين :

Thus, the inverse matrix of A is the matrix obtained on the right:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-1&3\\-1&3&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}$$

2) نستعمل طريقة المصفوفة المرافقة: نحسب المحدد

We use the adjoint matrix method: we calculate the determinant

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\Longrightarrow \det(A)=-4$$

We calculate the adjoint matrix — نحسب المصفوفة المرافقة

$$A^{*}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{pmatrix}$$

Calculate the transpose of the adjoint matrix — نحسب منقول المصفوفة المرافقة

$$(A^{*})^{T}=\begin{pmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{pmatrix}$$

نطبق النظرية لحساب المقلوب، نجد:

Applying the theorem to calculate the inverse, we find:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}(A^{*})^{T}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-1&3\\-1&3&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}$$

Exercise N°– 10 – تمرين رقم

Prove that أثبت أن

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c.$$

Solution : الحــل

نجمع كل الأسطر ونضعها في السطر الأول. نحصل على سطر يتكون من $1+a+b+c$ يمكننا استخلاصها من المحدد، أي نحصل على:

We sum all the lines and put them on the first line. We get a line consisting of $1+a+b+c$ that we can extract from the determinant, that is we get:

$$D = (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}.$$

ثم نقوم بالتحويل التالي على الأعمدة: $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$، $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$ نحصل على:

Then we do the following transformation on the columns: $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$ we get:

$$D = (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

نحصل على محدد مصفوفة مثلثية سفلية، عناصر قطرها 1. ومنه المحدد

We get the determinant of the lower triangular matrix, elements of diagonal 1. Then de determinant is:

$$D = 1+a+b+c.$$

الفصل الثاني

$Matrix\ diagonalization$ تقطير مصفوفة

1.2 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 2*

تمرين رقم – 1 – Exercise N°

لتكن A مصفوفة من $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ المعرفة كمايلي :

Let A be a matrix of $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ defined as follows:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) هل المصفوفة A قابلة للتقطير ؟

Is the matrix A diagonalizable?

2) أحسب $(A-2I_3)^2$ ثم $(A-2I_3)^n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$. إستنتج A^n.

Calculate $(A-2I_3)^2$ then $(A-2I_3)^n$ for each $n \in \mathbb{N}$. Deduce A^n.

الحـــل - Solution

1) حساب كثير الحدود المميز للمصفوفة A.

We compute the characteristic polynomial of the matrix A.

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -4 & 4-X & 0 \\ -2 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-4X+4) = (2-X)^3.$$

المصفوفة A تقبل قيمة ذاتية واحدة هي 2 إذا كان قطرية، فستكون مشابهة للمصفوفة $2.I_3$، لذلك ستكون مساوية لـ $2I_3$ وهذا ليس هو الحال ، لذلك لا يمكن أن تكون قابلة للتقطير.

The matrix A accepts a single eigenvalue is 2. If it were a diagonal, it would be similar to the matrix $2.I_3$, so it would be equal to $2I_3$ which is not the case, so it cannot be diagonalizable.

2) **لدينا:**

we have

$$(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

وبالتالي $(A-2I_3)^0 = I$،

So $(A-2I_3)^0 = I$,

$$(A-2I_3)^1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و من أجل $n \geq 2$ **لدينا** $(A-2I_3)^n = 0$.

and for $n \geq 2$ we have $(A-2I_3)^n = 0$.

نلاحظ أن الفضاء الشعاعي الذاتي للقيمة 2

We note that the eigen-vectorial space associated to 2

$$\begin{aligned} E_{\lambda=2} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0\right\} \\ &= \left\{(x,2x,z) : x,y \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \langle (1,2,0), (0,0,1) \rangle \end{aligned}$$

ذو بعد يختلف عن بعد الفضاء $\mathbb{R}^3$:

It has a dimension different from the space dimension of $\mathbb{R}^3$:

$$\dim\left(E_{\lambda=2}\right) = 2 \neq 3$$

وهذا ما يؤكد أيضا أن المصفوفة A غير قابلة للتقطير.

This also confirms that the matrix A is not diagonalizable.

نضع $B = A - 2I_3$ ولدينا $A = A - 2I_3 + 2I_3 = B + 2I_3$ حيث $B^n = 0$ من أجل $n \geq 2$. علاوة على ذلك ، المصفوفات B و $2I_3$ متبادلة، لذلك

We put $B = A - 2I_3$ and we have $A = A - 2I_3 + 2I_3 = B + 2I_3$ where $B^n = 0$, for $n \geq 2$. Furthermore, the matrices B and $2I_3$ are interchangeable, therefore:

$$A^n = (B + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (2I_3)^{n-k}$$

حيث C_n^k هي معاملات نيوتن ذات الحدين :

where C_n^k are Newton's binomial coefficients:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

ومع ذلك ، من أجل $k \geq 2$ لدينا $B^k = 0$ من أجل $n \geq 2$،

However, for $k \geq 2$ we have $B^k = 0$, for $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= C_n^0 B^0 (2I_3)^n + C_n^1 B^1 (2I_3)^{n-1} \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n B \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n (A - 2I_3) \\ &= 2^n (1-n) I_3 + 2^{n-1} n A. \end{aligned}$$

then ومنه

$$\begin{aligned} A^n &= 2^n(1-n)I_3 + n2^{n-1}A. \\ &= 2^n(1-n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(n-1)\,2^n & n2^{n-1} & 0 \\ -n2^{n+1} & (n+1)\,2^n & 0 \\ -n2^n & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

لتكن المصفوفة

Let the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) أوجد كثير الحدود المميز للمصفوفة A.

Find the characteristic polynomial of the matrix A.

2) أثبت أن المصفوفة A قابلة للتقطير ثم أوجد المصفوفة D القطرية ومصفوفة العبور P العكوسة حيث $A = PDP^{-1}$.

Prove that the matrix A is diagonalizable and then find the diagonal matrix D and the invertible transit matrix P where $A = PDP^{-1}$.

3) أحسب A^n من أجل $n \in \mathbb{N}$.

Calculate A^n for $n \in \mathbb{N}$.

Solution - الحل

1) حساب كثير الحدود المميز P_A للمصفوفة A.

Compute the characteristic polynomial P_A of the matrix A.

$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} &= (4-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (4-X)(X^2-6X+8) \\ &= (4-X)(X-4)(X-2) \\ &= (2-X)(4-X)^2 \end{aligned}$$

2) كثير الحدود المميز P_A يقبل جذرين ومنه المصفوفة A تملك قيمتين ذاتيتين $\lambda_1 = 2$ قيمة ذاتية بسيطة و $\lambda_2 = 4$ قيمة ذاتية مضاعفة .

The characteristic polynomial P_A accepts two roots, of which the matrix A has two eigenvalues $\lambda_1 = 2$ simple eigenvalue and $\lambda_2 = 4$ a double eigenvalue.

لنحدد الفضاءات الشعاعية الذاتية المرافقة. ليكن

Let's define the associated eigen-vectorial spaces. So let

$$E_1 = \{V = (x, y, z) : AV = 2V\}$$

We solve the system: **نقوم بحل الجملة:**

$$\begin{cases} 3x - z = 2x \\ 2x + 4y + 2z = 2y \\ -x + 3z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

الفضاءالشعاعي الذاتي E_1 المرافق للقيمة الذاتية 2 هو مستقيم شعاع توجيهه هو $e_1 = (1, -2, 1)$.

The eigen-vectorial space E_1 associated to the eigenvalue 2 is a straight line whose directional vector $e_1 = (1, -2, 1)$.

Let **ليكن**

$$E_2 = \{v = (x, y, z) : Av = 4v\}$$

We solve the system: **نقوم بحل الجملة:**

$$\begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2x + 4y + 2z = 4y \\ -x + 3z = 4z \end{cases} \iff z = -x$$

الفضاءالشعاعي الذاتي E_2 المرافق للقيمة الذاتية 4 هو المستوي ذو المعادلة: $z = -x$ **التي يتم إعطاء أساسها ، على سبيل المثال من قبل الأشعة** $e_2 = (0, 1, 0)$ **و** $e_3 = (1, 0, -1)$.

The eigen-vectorial space E_2 associated to the eigenvalue 4 is the plane with the equation: $z = -x$ whose basis is given, for example by the vectors $e_2 = (0, 1, 0)$ and $e_3 = (1, 0, -1)$.

لاحظ أنه يمكننا القراءة مباشرة من المصفوفة A، حقيقة أن الشعاع $\vec{e}_2$ هو شعاع ذاتي مرتبطة بالقيمة الذاتية 4.

Note that we can read directly from the matrix A, the fact that the vector $\vec{e}_2$ is an eigenvector associated with the eigenvalue 4.

أبعاد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية تساوي تعدد القيم الذاتية المرافقة وبالتالي، الفضاء $\mathbb{R}^3$ يقبل أساس الأشعة الذاتية والمصفوفة A قابلة للتقطير.

The dimensions of the sub-eigen-vectorial spaces are equal to the multiplicity of the associated eigenvalues. Thus, the space $\mathbb{R}^3$ accepts the basis of the eigenvectors and the matrix A is diagonalizable.

نضع P مصفوفة العبور، ومنه:

We put P as the transit matrix, from which:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

و المصفوفة القطرية D المرافقة لها

and the associated diagonal matrix D

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

We have the relationship: **لدينا العلاقة:**

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3) **حساب A^n من أجل $n \in \mathbb{N}$.**

Compute A^n for $n \in \mathbb{N}$.

من السؤال السابق لدينا $A = PDP^{-1}$ ومنه من أجل $n \in \mathbb{N}$، $A^n = PD^nP^{-1}$ و

From the previous question we have $A = PDP^{-1}$, then for $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ and

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix},$$

يبقى علينا حساب P^{-1}. ونعلم أن

We are left with the calculation of P^{-1} and we know that

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \left(P^{*}\right)^{T}$$

where أين

$$\det P = -2, \quad P^{*} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

then, we have: ومنه لدينا:

$$\begin{aligned} A^{n} &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n} & 0 & 0 \\ 0 & 4^{n} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n}+1 & 0 & 1-2^{n} \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1} & 2^{n+1}-2 \\ 1-2^{n} & 0 & 2^{n}+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

لتكن المصفوفة A :

Let the matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) أقطر المصفوفة A.

Diagonalize the matrix A.

2) عبر عن حلول الجملة التفاضلية $X' = AX$ في قاعدة الأشعة الذاتية وأرسم مساراتها.

Express the solutions of the differential system $X' = AX$ in the eigenvector rule and draw their paths.

Solution - الحـــل

1) تقطير المصفوفة A.

Diagonalization of the A matrix.

كثير الحدود المميز

characteristic polynomial

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - 1 = (X-1)(X+1).$$

المصفوفة A تقبل قيمتين ذاتيتين مختلفتين ومنه فهي قابلة للتقطير.

The matrix A accepts two different eigenvalues, therefore it is diagonalizable.

إيجاد الأساس الذاتي لـ A.

Finding the eigen-basic vectors of A.

ليكن $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$،

Let $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$Au = u \iff x = y \quad \text{و} \quad Au = -u \iff x = -y.$$

نلاحظ أن $u_1 = (1,1)$ و $u_2 = (-1,1)$ ، حيث : u_1 الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية 1 و u_2 الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية -1 هما مستقلان خطيا، لذا فيشكلان أساسا لـ $\mathbb{R}^2$ وبالتالي لدينا $A = PDP^{-1}$ حيث

Note that $u_1 = (1,1)$ and $u_2 = (-1,1)$, where: u_1 eigenvector of eigenvalue 1 and u_2 eigenvector of eigenvalue -1 are linearly independent, so they form the basis of $\mathbb{R}^2$ and thus we have $A = PDP^{-1}$ where

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) ليكن Y حيث $PY = X$ لدينا إذن

Let Y where $PY = X$ then we have

$$X' = AX \iff PY' = APY \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = DY.$$

حلول الجملة التفاضلية $X' = AX$ في أساس الأشعة الذاتية (u_1, u_2) هي حلول الجملة $Y' = DY$.
إذا كان $Y = (x, y)$ لدينا $x'(t) = x(t)$ و $y'(t) = -y(t)$ بالتالي حلول الجملة هي $x(t) = ae^t$ و $y(t) = be^{-t}$ حيث a و b ثوابت حقيقية. وتكون مساراتها في الأساس الذاتي (u_1, u_2) عبارة عن منحنيات ذات المعادلة $y = c/x$ مع $c \in \mathbb{R}$ فروع من القطوع الزائدة.

The solutions of the differential system $X' = AX$ in the eigenvector (u_1, u_2) are the solutions of the system $Y' = DY$. If $Y = (x, y)$ we have $x'(t) = x(t)$ and $y'(t) = -y(t)$ then the solutions to the system are $x(t) = ae^t$ and $y(t) = be^{-t}$ where a and b are real constants, and their trajectories in the eigenvalue (u_1, u_2) are curves of the equation $y = c/x$ with $c \in \mathbb{R}$ branches of hyperboles.

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

لتكن المصفوفة A :

Let the matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1) حلل كثير الحدود المميز لـ A إلى جداء عوامل ثم أوجد القيم الذاتية للمصفوفة.

Factorize the characteristic polynomial of A and then find the eigenvalues of the matrix.

2) أوجد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية لـ A.

Find the sub-eigen-vectorial spaces of A.

3) هل المصفوفة A قابلة للتقطير؟

Is the matrix A diagonalizable?

Solution - الحـــل

1) كتابة كثير الحدود المميز للمصفوفة A على شكل جداء عوامل: لدينا

Writing the characteristic polynomial of the matrix A as a product of factors: We have

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 3-X & 2 & 4 \\ -1 & 3-X & -1 \\ -2 & -1 & -3-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} C_1 \longleftarrow C_1 - C_3 & & \\ -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 1+X & -1 & -3-X \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$$

$$= (-1-X)(X^2-4X+4) = -(X+1)(X-2)^2$$

القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda_1 = -1$ قيمة ذاتية بسيطة و $\lambda_2 = 2$ قيمة ذاتية مضاعفة.

The eigenvalues of A are $\lambda_1 = -1$ a simple eigenvalue and $\lambda_2 = 2$ multiplicative eigenvalue.

2) **إيجاد الفضاءات الشعاعية الذاتية الجزئية للمصفوفة A.**

Find the eigen-sub-vectorial spaces of the matrix A.

بالنسبة للقيمة الذاتية -1 ليكن الفضاء الشعاعي الجزئي E_{-1} المعرف

For the eigenvalue -1 let the sub-vectorial space E_{-1} be defined as

$$E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3,\ Au = -u\}.$$

let $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, **ليكن** $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$،

$$u \in E_{-1} \iff \begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ -x + 4y - z = 0 \\ -2x - y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

الفضاء E_{-1} هو مستقيم شعاع توجيهه هو

The space E_{-1} is a straight line whose directional vector

$$u_1 = (1, 0, -1).$$

الفضاء الشعاعي الجزئي المرافق للقيمة 2 الفضاء الشعاعي E_2 المعرف

The sub-vectorial space associated with the value 2 is the vectorial space E_2 defined by

$$E_2 = \{u \in \mathbb{R}^3,\ Au = 2u\}.$$

let $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ — ليكن $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$u \in E_2 \iff \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x - y - 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

3) الفضاء E_2 هو مستقيم شعاع توجيهه

The space E_2 is a straight line whose directional vector

$$u_2 = (2, 1, -1).$$

الفضاء الشعاعي الجزئي E_2 ذو بعد 1، ومنه المصفوفة A ليست قابلة للتقطير.

The sub-vectorial space E_2 is of dimension 1, then the matrix A is not diagonalizable.

تمرين رقم – 5 – Exercise N°

نسمي مصفوفة $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ عشوائية إذا كانت معاملاتها أعداد حقيقية موجبة أو معدومة وإذا كان مجموع معاملات كل من أسطرها يساوي 1.

We call a matrix $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ random if its coefficients are positive or null real numbers and if the sum of the coefficients of each of its rows is 1.

1) أثبت أنه إذا كانت $\lambda \in \mathbb{C}$ قيمة ذاتية للمصفوفة A فإن $|\lambda| \leq 1$.

Prove that if $\lambda \in \mathbb{C}$ is an eigenvalue of A then $|\lambda| \leq 1$.

2) أثبت أن 1 قيمة ذاتية ثم أوجد الشعاع الذاتي المرافق له.

Prove that 1 is an eigenvalue and then find its eigenvector.

Solution - الحل

1) **نفرض أن $\lambda \in C$ قيمة ذاتية للمصفوفة A وليكن z شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية. ليكن $i \in \{1, \ldots, n\}$ حيث $|z_i| = \max_{j=1,\ldots,n} |z_j|$. العمود رقم i من احداثيات المصفوفة Az تحقق $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_j$ وهذا يجب أن يساوي λz_i. بأخذ القيمة المطلقة واستخدام القاعدة الثلاثية نحصل على**

Let $\lambda \in C$ be an eigenvalue of the matrix A and let z be an eigenvector of the eigenvalue. Let $i \in \{1, \dots, n\}$ where $|z_i| = \max_{j=1,\dots,n} |z_j|$. be column number i from the coordinates of the matrix Az, make $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_j$ and this should equal λz_i. By taking the absolute value and using the triple rule, we get

$$|\lambda||z_i| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|z_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|z_i| \leq |z_i|$$

حيث نستعمل أيضا $a_{i,j} \geq 0$ **و** $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. **ومنه قد تحصلنا على** $|\lambda|\,|z_i| \leq |z_i|$. **لأن** $|z_i| \neq 0$ **(وإلا** z **يكون الشعاع المعدوم) هذا يعني أن** $|\lambda| \leq 1$.

We also use $a_{i,j} \geq 0$ and $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. Then, we get $|\lambda|\,|z_i| \leq |z_i|$. because $|z_i| \neq 0$ (otherwise z is the zero vector). This means that $|\lambda| \leq 1$.

2) **يكفي أخذ**

Enough take

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

كي نلاحظ أن $Az = z$. **وبالتالي يكون** z **شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية** 1.

To note that $Az = z$. So z is an eigenvector associated to the eigenvalue 1.

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

اشرح بدون حساب سبب عدم إمكانية تقطير المصفوفة التالية : *Explain without calculating why the following matrix diagonalization is not possible:*

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Solution - الحــل

المصفوفة A **مثلثية علوية قيمها الذاتية هي عناصر قطرها المتمثلة في قيمة واحدة هي** i. **إذا كانت المصفوفة** A **قابلة للتقطير فحتما نستطيع إيجاد مصفوفة عكوسة** $P \in GL_3(\mathbb{C})$ **تحقق:**

The matrix A is an upper triangular matrix whose eigenvalues are the elements of a single value i of diagonal. If the matrix A is diagonalizable then we can find an invertible matrix $P \in GL_3(\mathbb{C})$ check:

$$A = P(iI_3)P^{-1}.$$

لكن ولأن المصفوفة I_3 تبادلية مع جميع المصفوفات فإن:

However, because the matrix I_3 is commutative with all matrices, then:

$$A = iI_3PP^{-1} = iI_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

وليس هو الحال لهذا فإن المصفوفة A غير قابلة للتقطير.

this is not the case, so the matrix A is not diagonalizable.

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

ليكن m عدد حقيقي و f تشاكل ذاتي على $\mathbb{R}^3$ ذو المصفوفة A المعطاة في الأساس القانوني كما يلي:

Let m be a real number and f endomorphism of $\mathbb{R}^3$ with matrix A given in canonical basis as follows:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1) أوجد القيم الذاتية للتطبيق f ؟

Find the eigenvalues of f?

2) ماهي قيم m حتى يكون التطبيق الخطي قابل للتقطير ؟

What are the values of m for a linear application to be diagonalizable?

3) نفرض أن $m = 2$. أحسب A^k من أجل كل $k \in \mathbb{N}$.

Suppose that $m = 2$. Calculate A^k for each $k \in \mathbb{N}$.

Solution : الحـــل

1) إيجاد كثير الحدود المميز للمصفوفة A.

Find the characteristic polynomial of the matrix A.

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & X-m \end{vmatrix} =_{C_1+C_2\to C_1} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ X-1 & X-2 & -1 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix} \\
&=_{L_2-L_1\to L_2} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & 0 \\ 2-m & X-m \end{vmatrix} \\
&= (X-1)(X-2)(X-m).
\end{aligned}$$

القيم الذاتية لـ f هي 1 و 2 بشكل خاص إذا أخذنا $m=1$ أو 2 فإن f يقبل فقط قيمتين ذاتيتين.

The eigenvalues of f are 1 and 2 in particular if we take $m = 1$ or 2 then f accepts only two eigenvalues.

2) إذا كان $m \neq 1$ و $m \neq 2$ فإن f التشاكل الذاتي من $\mathbb{R}^3$ الذي يقبل ثلاث قيم ذاتية مختلفة : يكون هنا f قابل للتقطير و إذا كان $m=1$ فإن كثير الحدود المميز لـ f هو $(1-X)^2(2-X)$. ويكون f قابل للتقطير فقط إذا كان بعد الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي للقيمة الذاتية 1 يساوي 2. لنبحث عن هاته الفضاءات الشعاعية الجزئية (تذكر أن $m=1$). من أجل $u=(x,y,z)$ لدينا:

If $m \neq 1$ and $m \neq 2$ then f is an endomorphism of $\mathbb{R}^3$ which has three different eigenvalues: here f is diagonalizable and if $m = 1$. The characteristic polynomial of f is $(1-X)^2(2-X)$, and f is diagonalizable only if the dimension of the eigen-sub-vectorial space of eigenvalue 1 is 2. Let's find these eigen-sub-vectorial space (remember that $m = 1$). For $u = (x, y, z)$ we have:

$$f(u) = u \iff \begin{cases} z = 0 \\ -x+y+z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = 0 \end{cases}$$

نأخذ كأساس للفضاء $Ker(f-I)$ الشعاع $(1,1,0)$. بُعد الفضاء الذاتي $2 \neq 1$: ومنه المصفوفة غير قابلة للتقطير. نفرض الآن أن $m=2$. نبحث عن بُعد الفضاء $Ker(f-2I)$. لدينا من أجل $u=(x,y,z)$:

We take as a basis for the space $Ker(f-I)$ the vector $(1,1,0)$. eigen-sub-vectorial space dimension is $1 \neq 2$: of which the matrix is not diagonalizable. Now let $m=2$. We are looking for the dimension of space $Ker(f-2I)$. We have for $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=2u \iff \begin{cases} -x+z &= 0 \\ -x+z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= x \end{cases}$$

نأخذ كأساس للفضاء $Ker(f-2I)$ الشعاعين $(1,0,1)$ و $(0,1,0)$. بشكل خاص بُعد الفضاء $Ker(f-2I)$ هو 2 و f هنا قابل للتقطير.

We take as a basis for the space $Ker(f-2I)$ the vectors $(1,0,1)$ and $(0,1,0)$. Specifically the space dimension of $Ker(f-2I)$ is 2 and f here is diagonalizable.

3) **لنقطر f. وجدنا سابقا أساس ذاتي بالنسبة للقيمة الذاتية 2. من أجل القيمة الذاتية 1 ($m=2$) لدينا من أجل $u=(x,y,z)$:**

Let's diagonalize f. We previously found an eigenvector for the eigenvalue 2. For the eigenvalue 1, $(m=2)$ we have for $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=u \iff \begin{cases} z &= 0 \\ -x+y+z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x \\ y &= x \\ z &= 0 \end{cases}$$

نأخذ كأساس للفضاء $Ker(f-I)$ الشعاع $(1,1,0)$. ليكن $u=(1,1,0)$، $v=(0,1,0)$ و $w=(1,0,1)$. ومنه (u,v,w) أساس ذاتي لـ f في هذا الأساس مصفوفة f هي:

We take as a basis for the space $Ker(f-I)$ the vector $(1,1,0)$. Let $u=(1,1,0)$, $v=(0,1,0)$ and $w=(1,0,1)$. From which (u,v,w) is an eigenvector of f. In this basis, the matrix f is:

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

لتكن P مصفوفة العبور من الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^3$ الى الأساس (u,v,w). المصفوفة P المعطات بـ:

Let P be the transit matrix of the canonical basis of space $\mathbb{R}^3$ to the base (u,v,w). The matrix P is given by:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ولدينا $A = PDP^{-1}$. **يجب أن نحسب** P^{-1}. **نجد:**

We have $A = PDP^{-1}$. We have to calculate P^{-1}. We find:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

من $A = PDP^{-1}$ **نستنتج بالتراجع أن** $A^k = PD^kP^{-1}$. **لكن و لأن المصفوفة** D **قطرية لدينا:**

From $A = PDP^{-1}$, we conclude bu induction that $A^k = PD^kP^{-1}$. But since the matrix D is diagonal, we have:

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

After the calculations we find in the latter **بعد الحسابات نجد في الأخير**

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1 - 2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

الفصل الثالث

Linear equations المعادلات الخطية

1.3 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 3*

تمرين رقم – 1 – Exercise N°

حل الجمل الخطية التالية باستعمال طريقة غوص:

Solve the following linear system using the Gauss method:

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = & 3 \\ x & +2y & +z & = & 1 \\ 2x & +y & +z & = & 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & & +2z & = & 1 \\ & -y & +z & = & 2 \\ x & -2y & & = & 1 \end{cases}.$$

الحـــل - Solution

بإستخدام طريقة غوص، بالنسبة للجملة الأولى، نكتب:

Using the Gauss method for the first system, we write:

$$\begin{cases} x+y+2z & = & 3 & L_1 \\ x+2y+z & = & 1 & L_2 \\ 2x+y+z & = & 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ y-z &= -2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y-3z &= -6 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ y-z &= -2 \\ -4z &= -8 \quad L_2 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -1 \\ y &= 0 \\ z &= 2 \end{cases}$$

ومنه حلول الجملة هي $(x,y,z) = (-1,0,2)$.

The solutions to the system are $(x,y,z) = (-1,0,2)$.

بالنسبة للجملة الثانية، نسير بنفس الطريقة:

For the second system, we proceed in the same way:

$$\begin{cases} x+2z &= 1 \quad L_1 \\ -y+z &= 2 \quad L_2 \\ x-2y &= 1 \quad L_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+2z &= 1 \\ -y+z &= 2 \\ -2y-2z &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+2z &= 1 \\ -y+z &= 2 \\ -4z &= -4 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -1 \\ y &= -1 \\ z &= 1 \end{cases}$$

ومنه حلول الجملة هي $(x,y,z) = (-1,-1,1)$.

The solutions of the system are $(x,y,z) = (-1,-1,1)$.

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

1) أوجد حلول الجملة التالية بأربع طرق مختلفة (بالتعويض ، بالطريقة المحورية لغوص، بقلب مصفوفة المعاملات و باستخدام صيغة كرامر):

Find the solutions to the following system in four different ways (by substitution, by the pivot-Gauss's method, by matrix inversion coefficient and by using Cramer's method):

$$\begin{cases} 2x & + & y & = & 1 \\ 3x & + & 7y & = & -2 \end{cases}$$

2) اختر الطريقة التي تبدو لك أنها الأسرع في الحل، وفقا لقيم a لإيجاد حلول الجمل التالية:

Choose the method that seems to be the fastest to solve, according to the values of a, to find solutions to the following system:

$$\begin{cases} ax & + & y & = & 2 \\ (a^2+1)x & + & 2ay & = & 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+1)x & + & (a-1)y & = & 1 \\ (a-1)x & + & (a+1)y & = & 1 \end{cases}$$

Solution - الحــل

1.1) **Substitution method طريقة التعويض**

نستطيع كتابة المعادلة الأولى على الشكل التالي $y = 1-2x$. نعوض قيمة y في المعادلة الثانية نجد

We can write the first equation as $y = 1-2x$. Substituting the value of y into the second equation, we get:

$$3x+7y=-2 \implies 3x+7(1-2x)=-2 \implies 11x=9 \implies x=\frac{9}{11}.$$

نستنتج y :

We get y :

$$y = 1-2x = 1-2\frac{9}{11} = -\frac{7}{11}$$

ومنه حلول هذه الجملة هي الثنائية: $(\frac{9}{11}, -\frac{7}{11})$.

The solutions to this system is the pair: $(\frac{9}{11}, -\frac{7}{11})$.

2.1) **Gauss's method طريقة غوص**

نحتفظ بالسطر الأول L_1 مكانه ونغير موضع السطر L_2 بالسطر $2L_2 - 3L_1$ نجد الجملة المثلثية التالية :

We keep the first line L_1 in its place and change the position of the line L_2 in the line $2L_2 - 3L_1$ we find the following trigonometric system:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 11y = -7 \end{cases}$$

ونستنتج $y = -\frac{7}{11}$ ومنه من السطر الأول نجد $x = \frac{9}{11}$.

and we deduce $y = -\frac{7}{11}$, then from the first line we find $x = \frac{9}{11}$.

3.1) Matrix inverse method مقلوب المصفوفة

تكتب الجملة على الشكل المصفوفي كما يلي:

The system is written in matrix form as follows:

$$AX = Y \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

نجد حل الجملة بقلب المصفوفة:

We find the solution to the system by the matrix inverse:

$$X = A^{-1}Y.$$

مقلوب مصفوفة من الرتبة 2×2 يحسب كما يلي:

The inverse of a matrix of order 2×2 is calculated as follows:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{فإن} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ومن الضروري التأكد أن المحدد

It is necessary to ensure that the determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

It differs from 0. يختلف عن 0.

we find نجد

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} \\ \frac{-7}{11} \end{pmatrix}$$

4.1) Cramer's method طريقة كرامر

تكون صيغ كرامر لجملة خطية من معادلتين على النحو التالي إذا كان المحدد يحقق بالطبع $ad - bc \neq 0$:

Cramer's formulas for a linear system of two equations are as follows, if the determinant of course satisfies $ad - bc \neq 0$:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{و} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

الذي يعطينا :

which gives us:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{9}{11} \quad \text{و} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = -\frac{7}{11}$$

2) بادئ ذي بدء، نتطلع إلى معرفة ما إذا كان هناك حل وحيد، فهذه هي الحالة إذا وفقط إذا كان المحدد ليس معدوما. بالنسبة للجملة الأولى، فإن المحدد هو:

Firstly, we look to see if there is a unique solution, which is the case if and only if the determinant is not null. For the first system, the determinant is:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2+1 & 2a \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

لذلك هناك حل وحيد إذا وفقط إذا كان $a \neq \pm 1$.

So there is only one solution if and only if $a \neq \pm 1$.

بالطبع كل الطرق تؤدي إلى نفس النتيجة، فعلى سبيل المثال باستعمال طريقة التعويض، وعن طريق كتابة السطر الأول على الشكل: $y = 2 - ax$، وبالتعويض في السطر الثاني نجد $(a^2+1)x + 2a(2-ax) = 1$.

Of course, all methods lead to the same result, for example by using the substitution method, and by writing the first line in the form: $y = 2 - ax$, and by substituting in the second line we find $(a^2+1)x + 2a(2-ax) = 1$.

نستنتج أنه إذا كان $a \neq \pm 1$ فإن

We conclude that if $a \neq \pm 1$ then

$$x = \frac{4a-1}{a^2-1} \quad \text{و} \quad y = \frac{-2a^2+a-2}{a^2-1}.$$

الآن نتعامل مع الحالات الخاصة حسب قيم a. إذا كان $a=1$ فإن الجملة تأخذ الشكل :

Now we deal with the special cases according to the values of a. If $a=1$, then the system takes the form:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

لكن لا نستطيع أن نتحصل في نفس الوقت على $x+y=2$ و $x+y=\frac{1}{2}$. ومنه لا توجد حلول.

But we cannot have $x+y=2$ and $x+y=\frac{1}{2}$ at the same time then, there are no solutions.

إذا كان $a=-1$ فإن الجملة تأخذ الشكل :

If $a=-1$, then the system takes the form:

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$$

و لا توجد حلول.

and there are no solutions.

هنا المحدد

here the determinant

$$\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 - (a-1)^2 = 4a.$$

إذا كان $a \neq 0$ ومنه الحل الوحيد (x,y). مثلا باستعمال صيغة كرامر هو

If $a \neq is0$ then the only solution is (x,y). For example using Cramer's formula is

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a} \quad \text{و} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a}.$$

إذا كان $a=0$ لا توجد حلول.

If $a=0$ there are no solutions.

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

أوجد حلول الجملة التالية :

Find solutions to the following system:

$$(S) = \begin{cases} 3x & & +2z & & = 0 \\ & 3y & +z & +3t & = 0 \\ x & +y & +z & +t & = 0 \\ 2x & -y & +z & -t & = 0 \end{cases}$$

Solution - الحــل

نبدأ بتبسيط الجملة:

We start by simplifying the system:

- **نغير مكان السطر L_3 إلى السطر الأول وإعتباره محور غوص**

We change the position of the line L_3 to the first line and consider it a Gauss's axis

- **نعيد ترتيب المتغيرات بالترتيب التالي: y, t, x, z للاستفادة من الأسطر البسيطة بالفعل فنحصل على الجملة.**

We rearrange the variables in the following order: y, t, x, z to take advantage of the already simple lines, and we get the system.

$$\begin{cases} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 & L_1 \\ 3y & + & 3t & & & + & z & = & 0 & L_2 \\ -y & - & t & + & 2x & + & z & = & 0 & L_3 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 & L_4 \end{cases}$$

نبدأ طريقة غوص بالتحويلات التالية :

We start with a Gauss method with the following transformations:

$$\begin{cases} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 & \\ & & & - & 3x & - & 2z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 & \end{cases}$$

نجد أن الأسطر الثلاثة الأخيرة متساوية ومنه الجملة تكافئ:

We find that the last three lines are equal, and then, the system is equivalent to:

$$\begin{cases} y + t + x + z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

نختار x **و** y **كوسيط ومنه** $z = -\frac{3}{2}x$ **و** $t = -x - y - z = \frac{1}{2}x - y$. **ومنه حلول الجملة هي**

We choose x and y as arguments, of which $z = -\frac{3}{2}x$ and $t = -x - y - z = \frac{1}{2}x - y$. Then, the set solutions is

$$\mathcal{H}(S) = \left\{ \left(x, y, -\frac{3}{2}x, \frac{1}{2}x - y \right) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

Solve the following system:

حل الجملة التالية :

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Solution : الحــل

بالإعتماد على طريقة غوص، نقوم بالتحويلات التالية $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ **و** $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$ **فنتحصل على :**

Depending on the Gauss's method, we perform the following transformations $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ and $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$, so we get:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ 5y - 7z = 3b + a \\ 7y + z = 3c - a \end{cases}$$

ثم التحويل $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$ **الذي يعطينا الجملة المثلثية :**

Then the transformation $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$ which gives us the trigonometric system:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ 5y - 7z = 3b + a \\ 54z = 5(3c - a) - 7(3b + a) \end{cases}$$

من المعادلة الأخيرة نجد : $z = \frac{1}{54}(-12a - 21b + 15c)$ ثم بالتعويض نتحصل على الحلول:

From the last equation, we find: $z = \frac{1}{54}(-12a - 21b + 15c)$ Then, by substituting, we get the solutions:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{18}(8a + 5b - c), \\ y = \frac{1}{18}(-2a + b + 7c), \\ z = \frac{1}{18}(-4a - 7b + 5c). \end{cases}$$

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

حل الجمل التالية باستعمال طريقة كرامر:

Solve the following systems using Cramer's method:

$$1) \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Solution - الحـــل

1) لنتحقق أن الجملة، جملة كرامر بحساب محدد الجملة

Let's check that the system is Cramer's system, calculates the determinant of the system

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$$

ومنه الجملة جملة كرامر حلولها من الشكل:

then, the system is Cramer's system, its solutions are of the form:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

2) لنتحقق أن الجملة، جملة كرامر بحساب محدد الجملة

Let's check that the system is Cramer's system, calculates the determinant of the system

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

ومنه الجملة جملة كرامر حلولها من الشكل:

then, the system is Cramer's system, its solutions are of the form:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

حل الجملة التالية باستعمال طريقة المصفوفة المعكوسة وما التفسير الهندسي للنتيجة التي تحصلة عليها؟

Solve the following system using the inverse matrix method, and what is the geometric explanation for the result that you get?

$$\begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

Solution - الحــل

of the system form من شكل الجملة

$$\begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

we get نجد:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix} = 4 - m^2$$

tehn ومنه:

$$4 - m^2 = 0 \Longrightarrow m = 2 \vee m = -2$$

إذا كان $m = 2$ فإن المعادلة الثانية تصبح $0 = 12$. والجملة ليس لها حلول.

If $m = 2$ then the second equation becomes $0 = 12$, and the system has no solutions.

إذا كان $m = -2$ المعادلة الثانية تصبح $0 = 0$ وهنا الجملة تقبل عدد غير منته من الحلول أي

If $m = -2$, the second equation becomes $0 = 0$, and here the system accepts an infinite number of solutions, i.e.

$$x + my = -3 \Leftrightarrow x = -3 - my.$$

مجموعة الحلول هي:

The set of solutions is:

$$\mathcal{S} = \{(-3 - my, y); y \in \mathbb{R}\}.$$

إذا كان $m \neq 2 \vee m \neq -2$, **نأخذ:**

If $m \neq 2 \vee m \neq -2$, we take:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}$$

نقوم بحساب المصفوفة العكسية

We calculate the inverse matrix

$$M^{-1} = \frac{(M^*)^T}{\det(M)} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -m \\ -m & 1 \end{pmatrix}^T}{4 - m^2} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -m \\ -m & 1 \end{pmatrix}}{4 - m^2} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{m^2 - 4} & \dfrac{m}{m^2 - 4} \\ \dfrac{m}{m^2 - 4} & -\dfrac{1}{m^2 - 4} \end{pmatrix}$$

ومنه حلول الجملة تكون من الشكل

then the system solutions are of the form

$$X = M^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{m^2-4} & \frac{m}{m^2-4} \\ \frac{m}{m^2-4} & -\frac{1}{m^2-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{m-2} \\ -\frac{3}{m-2} \end{pmatrix}$$

أي:

i.e.:

$$x = \frac{6}{m-2}, y = -\frac{3}{m-2}$$

هندسيا ، يمكننا استنتاج أن المستقيمين $x + my = -3$ **و** $mx + 4y = 6$ **هم إما:**

Geometrically, we can conclude that the two lines $x + my = -3$ and $mx + 4y = 6$ are either:

- **متقاطعان في حالة** $m \neq (2, -2)$.

They intersect in the case of $m \neq (2, -2)$.

- **متوازيان تماما في حالة** $m = 2$.

They are perfectly parallel if $m = 2$.

- **ولا على التعيين في حالة** $m = -2$.

Not on appointment in the case of $m = -2$.

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

ناقش وفقا لقيمة الوسيط $a \in \mathbb{R}$ حلول الجملة:

Discuss according to the value of the intermediate $a \in \mathbb{R}$ solutions to the system:

$$\begin{cases} 3x & +y & -z & = & 1 \\ x & -2y & +2z & = & a \\ x & +y & -z & = & 1 \end{cases}$$

Solution - الحــل

محدد الجملة هو:

The determinant of the system is

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

معدوم ما يدل عن وجود عدد غير منته من الحلول أو لا يوجد حل ومنه باستعمال التحويلات التالية، و أولها تغيير ترتيب المعادلات حيث نبادل بين الأولى والثالثة نجد:

is equals to zero. What indicates the existence of an infinite number of solutions or that there is no solution, and then, using the following transformations, the first of which is changing the order of the equations, as we exchange between the first and the third one, we find:

$$\begin{cases} 3x & +y & -z & = & 1 \\ x & -2y & +2z & = & a \\ x & +y & -z & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & -z & = & 1 & L_1 \\ x & -2y & +2z & = & a & L_2 \\ 3x & +y & -z & = & 1 & L_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x & +y & -z & = & 1 & L_1 \\ & -3y & +3z & = & a-1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & -2y & +2z & = & -2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y & -z & = & \frac{1-a}{3} \\ y & -z & = & 1 \end{cases}$$

لكي الجملة تقبل عدد غير منته من الحلول يجب أن تكون قيم a:

In order for the system to accept an infinite number of solutions, the values of a must be:

$$\frac{1-a}{3} = 1 \Longrightarrow a = -2.$$

That is, in the case of $a = -2$, we find:

أي في حالة $a = -2$ نجد:

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} x & +y & -z & = & 1 \\ & y & -z & = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - y + z \\ z = y - 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ y = y \\ z = y - 1 \end{array} \right.$$

then, the set of solutions are:

ومنه مجموعة الحلول هي:

$$S = \{(0, y, y-1), y \in \mathbb{R}\}$$

If $a \neq -2$ then the system has no solution.

إذا كان $a \neq -2$ فإن الجملة ليس لها حل.

القسم ا

الجزء الثاني : التحليل الرياضي 2 : Part Two
Mathematical analysis

الفصل الرابع

النشر المحدود و حساب التكاملات

Limited Expansion and Integrals calculus

1.4 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 4*

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

أحسب التكاملات التالية عن طريق التكامل بالتجزئة.

Compute the following integrals by integration by parts.

$$1) \int x^2 \ln x \, dx. \qquad 2) \int x \arctan x dx.$$

$$3) \int \ln x dx \quad \textit{then} \quad \int (\ln x)^2 \, dx. \qquad 4) \int \cos x \exp x \, dx.$$

Solution - الحــل

- $\int x^2 \ln x \, dx$

لنكامل بالتجزئة حيث $u = \ln x$ و $v' = x^2$.

Let's integrate by parts where we put $u = \ln x$ and $v' = x^2$.

ومنه $u' = \frac{1}{x}$ و $v = \frac{x^3}{3}$.

then $u' = \frac{1}{x}$ and $v = \frac{x^3}{3}$.

$$\begin{aligned}\int \ln x \cdot x^2\,dx = \int uv' = [uv] - \int u'v &= \left[\ln x \cdot \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}\,dx \\ = \left[\ln x \cdot \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{x^2}{3}\,dx &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c.\end{aligned}$$

- $\int x \arctan x\,dx$

لنكامل بالتجزئة حيث $u = \arctan x$ **و** $v' = x$. **ومنه** $u' = \frac{1}{1+x^2}$ **و** $v = \frac{x^2}{2}$.

Let's integrate by parts where $u = \arctan x$ and $v' = x$. These include $u' = \frac{1}{1+x^2}$ and $v = \frac{x^2}{2}$.

$$\begin{aligned}\int \arctan x \cdot x\,dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= \left[\arctan x \cdot \frac{x^2}{2}\right] - \int \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left[\arctan x \cdot \frac{x^2}{2}\right] - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + c \\ &= \frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x - \frac{1}{2}x + c\end{aligned}$$

- $\int (\ln x)^2\,dx$ then $\int \ln x\,dx$

من أجل التكامل : $\int \ln x\,dx$ **بإستعمال التكامل بالتجزئة حيث** $u = \ln x$ **و** $v' = 1$. **ومنه** $u' = \frac{1}{x}$ **و** $v = x$.

In order to integrate: $\int \ln x\,dx$ using integration by parts, where $u = \ln x$ and $v' = 1$. Then $u' = \frac{1}{x}$ and $v = x$.

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v\\ &= [\ln x \cdot x] - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx\\ &= [\ln x \cdot x] - \int 1\,dx\\ &= x\ln x - x + c\end{aligned}$$

نستعمل التكامل بالتجزئة لحساب $\int (\ln x)^2\,dx$ **حيث** $u=(\ln x)^2$ **و** $v'=1$. **ومنه** $u' = 2\frac{1}{x}\ln x$ **و** $v=x$.

We use integration by parts to calculate $\int (\ln x)^2\,dx$ where $u=(\ln x)^2$ and $v'=1$. Of which $u' = 2\frac{1}{x}\ln x$ and $v=x$.

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2\,dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v\\ &= \left[x(\ln x)^2\right] - 2\int \ln x\,dx\\ &= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c\end{aligned}$$

للحصول على السطر الأخير ، استخدمنا التكامل المحسوب سابقا.

To get the last line, we used the previously computed integral.

- **نضع** $I = \int \cos x \exp x\,dx$.

نستعمل التكامل بالتجزئة حيث $u=\exp x$ **و** $v'=\cos x$. **ومنه** $u'=\exp x$ **و** $v=\sin x$. **إذن:**

We use the integral by parts where $u=\exp x$ and $v'=\cos x$. Then, $u'=\exp x$ and $v=\sin x$. So:

$$I = \int \cos x \exp x\,dx = \left[\sin x \exp x\right] - \int \sin x \exp x\,dx$$

إذا فرضنا أن: $J = \int \sin x \exp x\,dx$ **فإننا نحصل على:**

If we assume that: $J = \int \sin x \exp x \, dx$, then we get:

$$I = \big[\sin x \exp x\big] - J$$

من أجل حساب J نعيد استعمال التكامل بالتجزئة مرة أخرى مع $u = \exp x$ و $v' = \sin x$. هذا يعطينا:

In order to calculate J we use integration by parts again with $u = \exp x$ and $v' = \sin x$. This gives us:

$$J = \int \sin x \exp x \, dx = \big[-\cos x \exp x\big] - \int -\cos x \exp x \, dx = \big[-\cos x \exp x\big] + I$$

إذن لدينا معادلة ثانية:

So we have a second equation:

$$J = \big[-\cos x \exp x\big] + I$$

نعوض J بقيمتها في المعادلة السابقة نجد:

Substituting J for its value in the previous equation, we find:

$$I = \big[\sin x \exp x\big] - J = \big[\sin x \exp x\big] - \big[-\cos x \exp x\big] - I$$

where حيث

$$2I = \big[\sin x \exp x\big] + \big[\cos x \exp x\big]$$

وهذا ما يسمح لنا بحساب التكامل:

This allows us to calculate the integral:

$$I = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \exp x + c.$$

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

أحسب التكاملات التالية، مع تحديد مجال تعريف التكامل إذا لزم الأمر:

Calculate the following integrals, specifying the integral domain definition if is necessary:

$$1)\int \sin^8 x\cos^3 x dx.\quad 2)\int \cos^4 x dx.\quad 3)\int \cos^{2003} x\sin x dx.$$
$$4)\int \frac{1}{\sin x}dx.\quad 5)\int \frac{1}{\cos x}dx.\quad 6)\int \frac{1}{7+\tan x}dx.$$

Solution - الحـــل

- التكامل معرف على $\mathbb{R}$.

The integral is defined at $\mathbb{R}$.

$$\int \sin^8 x\cos^3 x dx = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + c$$

- التكامل معرف على $\mathbb{R}$.

The integral is defined at $\mathbb{R}$.

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + c$$

- التكامل معرف على $\mathbb{R}$.

The integral is defined at $\mathbb{R}$.

$$\int \cos^{2003} x\sin x dx = -\frac{1}{2004}\cos^{2004} x + c$$

- التكامل معرف على $]k\pi,(k+1)\pi[$

The integral is defined at $]k\pi,(k+1)\pi[$.

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

(تغيير المتغير $u=\cos x$ أو $u=\tan\frac{x}{2}$).

(Change the variable $u=\cos x$ or $u=\tan\frac{x}{2}$).

- التكامل معرف على $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$

The integral is defined at $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

(تغيير المتغير $u=\sin x$ أو $u=\tan\frac{x}{2}$).

(Change the variable $u=\sin x$ or $u=\tan\frac{x}{2}$).

- التكامل معرف على المجال $\mathbb{R}\setminus\left\{\arctan(-7)+k\pi\,,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in Z\right\}$

The integral is defined at $\mathbb{R}\setminus\left\{\arctan(-7)+k\pi\,,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in Z\right\}$

$$\int \frac{1}{7+\tan x}dx = \frac{7}{50}x + \frac{1}{50}\ln|\tan x+7| + \frac{1}{50}\ln|\cos x| + c$$

(تغيير المتغير $u=\tan x$).

(Change the variable $u=\tan x$).

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

أحسب التكاملات التالية عن طريق تغيير المتغير.

Calculate the following integrals by changing the variable.

$$1)\int (\cos x)^{1234}\sin x\,dx.\quad 2)\int \frac{1}{x\ln x}\,dx.$$
$$3)\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx.\quad 4)\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx.$$

Solution - الحـــل

- $\int (\cos x)^{1234}\sin x\,dx$

نضع تغيير المتغير $u=\cos x$ **لدينا** $x=\arccos u$ **و** $du=-\sin x\,dx$ **نحصل على**

We put the variable change $u=\cos x$ we have $x=\arccos u$ and $du=-\sin x\,dx$ we get:

$$\int (\cos x)^{1234}\sin x\,dx=\int u^{1234}(-du)=-\frac{1}{1235}u^{1235}+c=-\frac{1}{1235}(\cos x)^{1235}+c$$

This primitive function is defined at $\mathbb{R}$.

هذه الدالة الأصلية معرفة على $\mathbb{R}$.

- $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

ليكن تغيير المتغير $u=\ln x$ **لدينا** $x=\exp u$ **و** $du=\frac{dx}{x}$ **نكتب :**

Let the change of variable $u=\ln x$, then we have $x=\exp u$ and $du=\frac{dx}{x}$ we write:

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx=\int \frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x}=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+c=\ln|\ln x|+c$$

هذه الدالة الأصلية معرفة على $]0,1[$ **أو على** $]1,+\infty[$ **(الثابت قد يكون مختلف بالنسبة للمجالين).**

This primitive function is defined as $]0,1[$ or $]1,+\infty[$ (the constant may be different for the two intervals).

- $\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx$

ليكن تغيير المتغير $u=\exp x$. **ومنه** $x=\ln u$ **و** $du=\exp x\,dx$ **الذي يكتب أيضا** $dx=\frac{du}{u}$.

Let the variable be changed to $u = \exp x$. Including $x = \ln u$ and $du = \exp x\, dx$ which also writes $dx = \frac{du}{u}$.

$$\int \frac{dx}{3+\exp(-x)} = \int \frac{1}{3+\frac{1}{u}} \left(\frac{du}{u}\right) = \int \frac{du}{3u+1} = \frac{1}{3}\ln|3u+1| + c = \frac{1}{3}\ln(3\exp x + 1) + c$$

هذه الدالة الأصلية معرفة على $\mathbb{R}$.

This primitive function is defined at $\mathbb{R}$.

- $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$

الغرض من تغيير المتغير هو اختزاله إلى شيء معروف. لدينا هنا كسر بجذر تربيعي في المقام وتحت الجذر كثير حدود من الدرجة 2. ما نعرفه هو كيف نكامل

The purposed of changing a variable is to reduce it to something known. Here we have a fraction with a square root in the denominator and under the root a polynomial of degree 2. What we know is how to integrate

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c,$$

لأننا نعرف مشتقة الدالة $\arcsin(t)$ وهو

Because we know the derivative of the function $\arcsin(t)$ which is

$$\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

لذلك سنحاول العودة إليه. لنحاول كتابة ما تحت الجذر $4x - x^2$ على الشكل

We will try to get back to it. Let's try to write under the radical $4x - x^2$ in the form

$$1 - t^2 : 4x - x^2 = 4 - (x-2)^2 = 4\left(1 - (\frac{1}{2}x - 1)^2\right).$$

لذلك من الطبيعي تجربة تغيير المتغير $u = \frac{1}{2}x - 1$ من أجله يكون: $4x - x^2 = 4(1-u^2)$ و $dx = 2du$.

So it is natural to experiment with changing the variable $u = \frac{1}{2}x - 1$ for it is: $4x - x^2 = 4(1-u^2)$ and $dx = 2du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{2du}{\sqrt{4(1-u^2)}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c = \arcsin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + c$$

الدالة $\arcsin u$ معرفة وقابلة للإشتقاق على $u \in]-1,1[$ هذه الدالة الأصلية معرفة على $x \in]0,4[$.

The function $\arcsin u$ is defined and is differentiable on $u \in]-1,1[$. This primitive function is defined on $x \in]0,4[$.

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

أحسب مساحة المنطقة المحددة بمنحنيات المعادلات

Calculate the area of the region bounded by the curves of the equations

$$y = \frac{x^2}{2} \; and \;\; y = \frac{1}{1+x^2}.$$

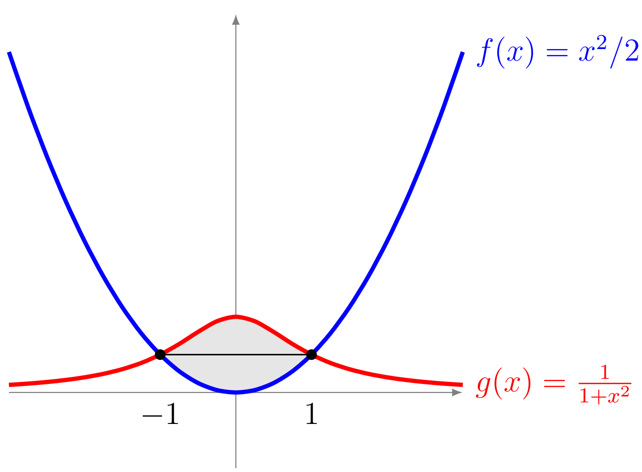
Solution - الحــل

منحنى الدالة $y = x^2/2$ هو قطع مكافئ ، و منحنى الدالة $y = \frac{1}{1+x^2}$ منحنى الجرس. برسم الرسمين البيانيين. معا يحدد هذان المنحنيان المنطقة التي سنقوم بحسابها.

The graph of the function $y = x^2/2$ is a parabola, and the graph of the function $y = \frac{1}{1+x^2}$ is a bell curve. Draw the two graphs. Together, these two curves define the area that we are going to calculate.

بادئ ذي بدء ، يتقاطع هذان المنحنيان عند نقاط الإحداثية $x = +1$ و $x = -1$: يمكن تخمين ذلك على الرسم البياني ثم التحقق منه عن طريق حل المعادلة $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$.

Firstly, these two curves intersect at the coordinate points $x = +1$ and $x = -1$: this can be guessed on the graph and then verified by solving the equation $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$.



We will calculate two areas: سنحسب مساحتين:

- المساحة $\mathcal{A}_1$ للمنطقة تحت القطع المكافئ ، وفوق محور الإحداثية وبين سطور المعادلة $(x=-1)$ و $(x=+1)$. ومنه :

The $\mathcal{A}_1$ area of the region under the parabola, above the ordinate axis and between the lines of the equation $(x=-1)$ and $(x=+1)$. Including:

$$\mathcal{A}_1=\int_{-1}^{+1}\frac{x^2}{2}\,dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{+1}=\frac{1}{3}.$$

- المساحة $\mathcal{A}_2$للمنطقة الواقعة تحت الجرس ، وفوق محور الإحداثيات وبين خطوط المعادلة $(x=-1)$ و $(x=+1)$. ومنه:

The area $\mathcal{A}_2$ for the area under the bell, above the ordinate axis and between the equation lines $(x=-1)$ and $(x=+1)$. Including:

$$\mathcal{A}_2=\int_{-1}^{+1}\frac{1}{x^2+1}\,dx=[\arctan x]_{-1}^{+1}=\frac{\pi}{2}.$$

- المساحة $\mathcal{A}$ تحت الجرس وفوق القطع المكافئ تساوي:

The area $\mathcal{A}$ under the bell and above the parabola is:

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_2-\mathcal{A}_1=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}.$$

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

حلل الكسور التالية ثم أوجد الدوال الأصلية.

Factorize the following fractions and then find the primitive functions.

1) $\dfrac{1}{a^2+x^2}$.	2) $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.	3) $\dfrac{x^3}{x^2-4}$.
4) $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$.	5) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$.	6) $\dfrac{1}{(x^2+2x-1)^2}$.
7) $\dfrac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2}$.	8) $\dfrac{3x+1}{x^2-2x+10}$.	9) $\dfrac{1}{x^3+1}$.

Solution - الحـــل

النتائج صالحة في كل مجال من مجموعة التعريف.

The results are valid in every interval of the definition set.

- $\frac{1}{x^2+a^2}$ **شكل بسيط ومنه الدالة الأصلية هي:**

A simple form of which the primitive function is:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + k.$$

- $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ **شكل بسيط ومنه الدالة الأصلية هي:**

A simple form of which the primitive function is:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + k.$$

- **يمكن كتابة:**

We can write:

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}.$$

ومنه الدالة الأصلية هي:

Then, the primitive function is:

$$\int \frac{x^3}{x^2-4}dx = \frac{x^2}{2} + \ln(x^2-4)^2 + k.$$

- $\frac{4x}{(x-2)^2} = \frac{4}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}$. **الدالة الأصلية هي:**

the primitive function is:

$$\int \frac{4x}{(x-2)^2}dx = 4\ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + k.$$

- $\frac{1}{x^2+x+1}$ **شكل شهير ومنه الدالة الأصلية هي:**

A popular form, including the primitive function is:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k.$$

- لدينا التحليل التالي:

We have the following factorization:

$$\frac{1}{(x^2+2x-1)^2}=\frac{1}{8(x+1+\sqrt{2})^2}+\frac{\sqrt{2}}{16(x+1+\sqrt{2})}+\frac{1}{8(x+1-\sqrt{2})^2}+\frac{-\sqrt{2}}{16(x+1-\sqrt{2})}$$

الدالة الأصلية هي:

the primitive function is:

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x-1)^2}=-\frac{x+1}{4(x^2+2x-1)}+\frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{x+1+\sqrt{2}}{x+1-\sqrt{2}}\right|+k.$$

- $\frac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2}$ من الشكل مشتق على الدالة ومنه الدالة الأصلية هي:

From the form is derived on the function, from which the original function is:

$$\int\frac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2}dx=-\frac{3}{2(x^2-2x+10)}+\frac{2(x-1)}{9(x^2-2x+10)}+\frac{2}{27}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right)+k.$$

- $\frac{3x+1}{x^2-2x+10}$ من الشكل مشتق على الدالة ومنه الدالة الأصلية هي:

From the form is derived on the function, from which the original function is:

$$\int\frac{3x+1}{x^2-2x+10}dx=\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+10)+\frac{4}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right)+k.$$

- يمكن كتابة:

We can write:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}.$$

الدالة الأصلية هي:

the primitive function is:

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+k.$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

أحسب التكاملات للدوال الكسرية التالية.

Calculate the integrals for the following rational functions.

$$1)\int_0^1\frac{dx}{x^2+2}.\quad 2)\int_{-1/2}^{1/2}\frac{dx}{1-x^2}.\quad 3)\int_2^3\frac{2x+1}{x^2+x-3}dx.$$
$$4)\int_0^2\frac{x\,dx}{x^4+16}.\quad 5)\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^3-7x+6}.\quad 6)\int_2^3\frac{4x^2}{x^4-1}dx.$$

Solution - الحـــل

- $\frac{1}{x^2+2}$ مشتق شهير للدالة قوس الظل ومنه :

$\frac{1}{x^2+2}$ is a well-known derivative of the arctangent function, including:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

- لنحلل الكسر:

Let's decompose the fraction:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x-1}.$$

ثم نحسب التكامل:

Then we calculate the integral:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} = \ln 3.$$

- لأن $2x+1$ هي مشتق الدالة x^2+x-3 فإن

Because $2x+1$ is the derivative of the function x^2+x-3, then

$$\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = \ln\left|x^2+x-3\right|\Big]_2^3 = \ln 3.$$

- نستطيع تحليل الكسر بالشكل البسيط:

We can analyze the fraction in the simplest way:

$$\frac{x}{x^4+16} = \frac{\sqrt{2}/8}{x^2-2x\sqrt{2}+4} - \frac{\sqrt{2}/8}{x^2+2x\sqrt{2}+4},$$

لكن الأبسط أن نضع تغيير للمتغير $x^2=u$. نجد:

But the simplest thing is to change the variable $x^2=u$. We find:

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{du}{u^2+16} = \frac{\pi}{32}.$$

- بالتحليل نجد:

By factorization, we find:

$$\frac{1}{x^3-7x+6}=\frac{1}{20(x+3)}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{5(x-2)}.$$

ومنه التكامل:

Then the integral:

$$\int\frac{dx}{x^3-7x+6}=\frac{1}{20}\ln\left|\frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5}\right|+C$$

حيث

$$\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^3-7x+6}=\frac{1}{10}\ln(27/4).$$

- بالتحليل نجد:

By factorization, we find:

$$\frac{4x^2}{x^4-1}=\frac{2}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

ومنه التكامل:

Then the integral:

$$\int\frac{4x^2}{x^4-1}dx=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+2\arctan x+C$$

where

حيث

$$\int_{2}^{3}\frac{4x^2}{x^4-1}\,dx=\ln\left(\frac{3}{2}\right)+2\arctan\left(\frac{1}{7}\right).$$

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

أدرس قيم التكامل التالي

Study the values of the following integral

$$I_n=\int_0^1\frac{\sin(\pi x)}{x+n}\,dx,$$

من أجل كل $n>0$.

for every $n>0$.

1– أثبت أن $0\le I_{n+1}\le I_n$

Prove that $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

2– أثبت أن $I_n \leq \ln \frac{n+1}{n}$ ثم استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Prove that $I_n \leq \ln \frac{n+1}{n}$ *and then conclude that* $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3– أحسب قيمة التكامل

Calculate the value of the integration.

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n.$$

Solution - الحـــل

1– **إثبات أن** $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$: **من أجل كل** $0 \leq x \leq 1$، **لدينا** $0 < x+n \leq x+n+1$ **و** $\sin(\pi x) \geq 0$، **ومنه ، نجد**

Prove that $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$: For every $0 \leq x \leq 1$, we have $0 < x+n \leq x+n+1$ and $\sin(\pi x) \geq 0$, then we find

$$0 \leq \frac{\sin(\pi x)}{x+n+1} \leq \frac{\sin(\pi x)}{x+n}$$

بتطبيق خاصية إيجابية التكامل.

applying the property of positive integration.

2– **من خلال** $0 \leq \sin(\pi x) \leq 1$ **لدينا**

Through $0 \leq \sin(\pi x) \leq 1$ we have

$$\frac{\sin(\pi x)}{x+n} \leq \frac{1}{x+n}$$

we find **نجد**

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{1}{x+n}\,dx = [\ln(x+n)]_0^1 = \ln\frac{n+1}{n} \to 0.$$

3– **حساب قيمة التكامل** Calculate the value of integration

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n.$$

لنجري تكامل بالتجزئة، حيث نضع $u(x) = \dfrac{1}{x+n}$ **و** $v'(x) = \sin(\pi x)$ **ومنه** $u'(x) = -\dfrac{1}{(x+n)^2}$ **و** $v(x) = -\dfrac{1}{\pi}\cos(\pi x)$ **نجد**

Let's do an integration by parts, where we put $u(x) = \dfrac{1}{x+n}$ and $v'(x) = \sin(\pi x)$ and from there $u'(x) = -\dfrac{1}{(x+n)^2}$ and $v(x) = -\dfrac{1}{\pi}\cos(\pi x)$. We find

$$\begin{aligned}
nI_n &= n\int_0^1 \frac{1}{x+n}\sin(\pi x)\,dx \\
&= -\frac{n}{\pi}\left[\frac{1}{x+n}\cos(\pi x)\right]_0^1 - \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\cos(\pi x)\,dx \\
&= \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n
\end{aligned}$$

يبقى لنا إيجاد قيمة

It remains for us to find a value

$$J_n = \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{(x+n)^2}dx.$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n}{\pi}J_n\right| \leq \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{|\cos(\pi x)|}{(x+n)^2}\,dx \leq \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\,dx \\
= \frac{n}{\pi}\left[-\frac{1}{x+n}\right]_0^1 = \frac{n}{\pi}\left(-\frac{1}{1+n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1} \to 0.
\end{aligned}$$

then ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n = \frac{2}{\pi}.$$

الفصل الخامس

$Differential\ equations$ المعادلات التفاضلية

1.5 سلسلة التمارين رقم $Exercise\ series\ N°\ 5$

تمرين رقم – 1 – Exercise N°– 1 –

حدد حل المعادلة التفاضلية

Determine the solution to the differential equation

$$3y' + 4y = 0$$

الذي يحقق الشرط الإبتدائي $y(0) = 2$.

which satisfies the initial condition $y(0) = 2$.

الحــل

هذه المعادلة تكتب على الشكل التالي

This equation is written in the following form

$$y' = -\frac{4}{3}y$$

إذن الحل الذي يحقق الشرط الإبتدائي هو

So the solution that satisfies the initial condition is

$$y(x) = y(0)\, e^{-\frac{4}{3}x}$$

أي:

then

$$y(x) = 2e^{-\frac{4}{3}x}.$$

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

لتكن المعادلة التفاضلية التالية:

Let the differential equation be:

$$y' + 2xy = x. \qquad (E)$$

1) أوجد حلول المعادلة التفاضلية المتجانسة.

Find the solutions to the homogeneous differential equation.

2) أوجد حلول المعادلة (E) التي تحقق $y(0) = 1$.

Find the solutions to the equation (E) which satisfies $y(0) = 1$.

الحــل

الدوال الأصلية للدالة $a(x) = 2x$ هي الدوال $A(x) = x^2/2 + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$ هو ثابت كيفي. ومنه حلول المعادلة المتجانسة E هي كل الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ من الشكل:

The primitive functions of $a(x) = 2x$ are the functions $A(x) = x^2/2 + k$ where $k \in \mathbb{R}$ is a arbitrary constant. Hence, the solutions to the homogeneous equation E are all functions defined on $\mathbb{R}$ of the form:

$$y(x) = ce^{-x^2}$$

حيث $c \in \mathbb{R}$ ثابت كيفي.

where $c \in \mathbb{R}$ is an arbitrary constant.

نبحث الآن عن الحل الخاص لـ E من الشكل:

Now we look for the particular solution of E of the form:

$$y_p(x) = c(x)e^{-x^2}$$

بإستعمال طريقة تغيير الثوابت. لدينا :

using the variable constants method. We've got :

$$y_p'(x) + 2xy_p(x) = c'(x)e^{-x^2}.$$

ومنه y_p هو حل لـ E إذا وفقط إذا كان : $c'(x) = xe^{x^2}$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

Of which y_p is a solution to E if and only if: $c'(x) = xe^{x^2}$ for each $x \in \mathbb{R}$.

لتكن الدالة $c(x)$ من بين الدوال الأصلية للدالة xe^{x^2} على سبيل المثال :

Let the function $c(x)$ be among the primitive functions of the function xe^{x^2}, for example:

$$c(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}.$$

then the function y_p where **ومنه الدالة y_p حيث**

$$y_p(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}e^{-x^2} = \frac{1}{2}$$

هي حل لـ E. وعليه، حلول المعادلة E هي كل الدوال من الشكل :

is a solution to E. Therefore, the solutions to the equation E are all functions of the form:

$$y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2} \quad ; c \in \mathbb{R}.$$

حيث y حل للمعادلة E_1، هنا الشرط $y(0) = 1$ يكافئ : $c = 1/2$.

where y is a solution to equation E_1, here the condition $y(0) = 1$ is equivalent to: $c = 1/2$.

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

أوجد حلول المعادلة التفاضلية التالية:

Find the solutions to the following differential equation:

$$y' + 2y = -4, \qquad y(1) = -3.$$

الحــل

لنحل المعادلة التفاضلية التالية

Let's solve the following differential equation

$$y' + 2y = -4$$

نحل المعادلة المتجانسة

We solve the homogeneous equation

$$y' + 2y = 0$$

التي حلولها هي الدوال

whose solutions are the functions

$$t \mapsto Ce^{-2t}, C \in \mathbb{R}.$$

نبحث عن حل خاص، نلاحظ أن الدالة الثابتة $y(t) = -2$ هي حل خاص. وبالتالي فإن حلول المعادلة هي الدوال

We are looking for a particular solution and we notice that the constant function $y(t) = -2$ is solution. The solutions of the equation are therefore the functions

$$y(t) = -2 + Ce^{-2t}.$$

إذن لدينا:

Then we have :

$$y(1) = -3 \Longrightarrow -2 + Ce - 2 = -3 \Longrightarrow C = -e^2.$$

أخيراً، الحل الوحيد للمشكلة المدروسة هو

Finally, the only solution of the considered problem is

$$y(t) = -e^{2-2t} - 2.$$

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

نقترح التكامل على أكبر مجال ممكن في $]0, \infty[$ للمعادلة التفاضلية:

We propose to integrate over the largest possible interval in $]0, \infty[$ of the differential equation:

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2 \qquad (E).$$

1) أوجد $a \in]0, \infty[$ حيث $y(x) = ax$ حل خاص y_0 للمعادلة (E).

Find $a \in]0, \infty[$ where $y(x) = ax$ is a particular solution y_0 of equation (E).

2) أثبت أن تغيير الدالة : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ يحول المعادلة (E) إلى المعادلة التفاضلية:

Prove that changing the function: $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$. Converts the equation (E) to the differential equation:

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1. \qquad (E_1)$$

3) أوجد حلول (E_1) على $]0, \infty[$.

Solve (E_1) by $]0, \infty[$.

4) أوجد كل حلول المعادلة (E) المعرفة على $]0, \infty[$.

Find all solutions to the equation (E) defined on $]0, \infty[$.

الحــل

لنحل المعادلة التفاضلية التالية

Let's solve the following differential equation

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1) **نبحث على** $a \in]0,\infty[$ **حيث** $y_0(x) = ax$ **يكون حل خاص للمعادلة، ولأن**

We are looking for $a \in [0,\infty[$ where $y_0(x) = ax$ is a special solution to the equation, and because

$$y_0'(x) - \frac{y_0(x)}{x} - y_0(x)^2 = -a^2x^2,$$

y_0 **هو حل إذا وفقط إذا كان** $a = \pm 3$. **و ليكن** $a = 3$.

y_0 is a solution if and only if $a = \pm 3$, we take $a = 3$.

2) **إذا كانت** z **دالة من الصنف** $\mathcal{C}^1$ **ولا تنعدم، نضع**

If z is a function of class $\mathcal{C}^1$ and does not null, we set

$$y(x) = 3x - 1/z(x).$$

ومنه y **حل إذا وفقط إذا كان :**

of which y is a solution if and only if:

$$\frac{z'(x)}{z(x)^2} + \frac{1}{xz(x)} - \frac{1}{z(x)^2} + \frac{6x}{z(x)} = 0.$$

بالضرب في $z(x)^2$ **نحصل على** y **حل للمعادلة السابقة إذا وفقط إذا كان** z **يحقق**

Multiplying by $z(x)^2$ we get y is a solution to the previous equation if and only if z satisfies

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1. \qquad (E_1)$$

3) **لنحل المعادلة** (E_1) **على المجال** $]0,\infty[$. **نأخذ دالة أصلية للدالة** $x \mapsto 6x + 1/x$ **الدالة** $x \mapsto 3x^2 + \ln(x)$

ومنه حلول المعادلة المتجانسة هي الدالة:

Let's solve the equation (E_1) over the interval $]0,\infty[$. We take a primitive function of $x \mapsto 6x + 1/x$ the function $x \mapsto 3x^2 + \ln(x)$. Then, the solutions of the homogeneous equation are the function:

$$x \mapsto Ae^{-3x^2-\ln(x)}.$$

لنبحث عن حل خاص للمعادلة (E_1) من الشكل

Let's find a special solution to the equation (E_1) of the form

$$z_p(x) = \alpha(x)e^{-3x^2-\ln(x)}$$

ومنه z_p هو حل إذا كان

Hence, z_p is a solution if

$$\alpha'(x)e^{-3x^2-\ln(x)} = 1$$

أي إذا كان $\alpha'(x) = xe^{3x^2}$ على سبيل المثال إذا كان $\alpha(x) = e^{3x^2}/6$.
حلول المعادلة (E_1) هي :

i.e. for example if $\alpha'(x) = xe^{3x^2}$ and $\alpha(x) = e^{3x^2}/6$. The solutions to the equation (E_1) are:

$$z(x) = \frac{1 + Ae^{-3x^2}}{6x}, \qquad \text{where} \qquad A \in \mathbb{R}.$$

4) سنستنتج الآن حلول (E) المعرفة على المجال $]0, \infty[$.

We will now derive the solutions of (E) defined on the interval $]0, \infty[$.

ليكن y حل من الصنف $\mathcal{C}^1$ معرف على المجال $]0, \infty[$. ولنفرض مبدئيا أن $y(x) > 3x$ على المجال المفتوح $I \subset]0, \infty[$، بأكبر قدر ممكن. ومنه

Let y be a solution of class $\mathcal{C}^1$ defined on the interval $]0, \infty[$. Let's assume that $y(x) > 3x$ is on the open interval $I \subset [0, \infty[]$, as large as possible. Then

$$y(x) = 3x - 1/z_I(x)$$

من أجل بعض الدوال $z_I < 0$ من الصنف $\mathcal{C}^1$ على I. حسب السؤال السابق ، لدينا بالضرورة أن:

For some functions $z_I < 0$ of class $\mathcal{C}^1$ on I. According to the previous question, we necessarily have that:

$$z_I(x) = \frac{1 + A_I e^{-3x^2}}{6x}$$

من أجل الثابت $A_I \in \mathbb{R}$. ولأن $z_I < 0$ فإن $A_I < 0$ لكن $I \neq]0, +\infty[$ لأن $1 > A_I e^{-3x^2}$ إذا كان x كبير بما يكفي. وبالتالي، يوجد مجال مفتوح J بحيث يكون $y(x) < 3x$ على J.

for the constant $A_I \in \mathbb{R}$, and because $z_I < 0$ then $A_I < 0$ but $I \neq]0, +\infty[$ because $1 > A_I e^{-3x^2}$ if x is big enough. Thus, there is an open interval J such that $y(x) < 3x$ over J.

نفترض مرة أخرى أن J كبير بقدر الإمكان. و أن في J، $y(x) = 3x - 1/z_J(x)$ لبعض الدوال $z_J > 0$ من الصنف $\mathcal{C}^1$. مرة أخرى من السؤال السابق،

We assume again that J is as large as possible and that in J , $y(x) = 3x - 1/z_J(x)$ for some functions $z_J > 0$ of class $\mathcal{C}^1$. Again from the previous question,

$$z_J(x) = \frac{1 + A_J e^{-3x^2}}{6x}$$

حيث A_J ثابت.

where A_J is a constant.

لأن المجال المفتوح $J =]a, b[$ كان من المفترض أن يكون الحد الأقصى، ومنذ ذلك الحين y يفترض أن يتم تعريفه على المجال $]0, +\infty[$ إذا كان $a > 0$ فإن $y(a) = 3a$ و نفس الشيء إذا كان $b < \infty$، $y(b) = 3b$، لأنه إن لم يكن باستمرارية الدالة y يكون لدينا $y(x) < 3x$ على المجال $]a - \epsilon, b + \epsilon[$ من أجل $\epsilon > 0$ صغير. هذا ممكن فقط على التوالي إذا كان $z_J(x) \to +\infty$ عندما $x \to a$ أو $z_J(x) \to +\infty$ عندما $x \to b$. لكن لقد قلنا أن:

Because the open interval $J =]a, b[$ was supposed to be the maximum, and since y is assumed to be defined on the interval $]0, +\infty[$ if $a > 0$ then $y(a) = 3a$ and the same if $b < \infty$, $y(b) = 3b$, because if it weren't for the continuity of the function y we would have $y(x) < 3x$ over $]a - \epsilon, b + \epsilon[$ for small $\epsilon > 0$. This is only possible respectively if $z_J(x) \to +\infty$ when $x \to a$ or $z_J(x) \to +\infty$ when $x \to b$. But we have said that:

$$z_J = \frac{1 + A_J e^{-3x^2}}{6x},$$

لذلك هذا غير ممكن على الإطلاق (باستثناء إذا كان على التوالي $a = 0$ و $b = 0$).
So this is not possible at all (except if respectively $a = 0$ and $b = 0$).

ومنه ليكن $y(x) = 3x$ على المجال $]0, +\infty[$ وليكن $y(x) < 3x$ على المجال $]0, +\infty[$ في هذه الحالة الأخيرة، $z(x) = 1/(3x - y(x))$ معرف على المجال $]0, +\infty[$ ويكتب :

So, let $y(x) = 3x$ over the interval $]0, +\infty[$ and let $y(x) < 3x$ over $]0, +\infty[$ in this last case, $z(x) = 1/(3x - y(x))$ defined on the interval $]0, +\infty[$ and write:

$$z(x) = [1 + Ae^{-3x^2}]/6x.$$

لأن $z > 0$، بالضرورة $A \geq -1$. ومنه إذا كان y حل فإن:
Because $z > 0$, is necessarily that $A \geq -1$. Hence, if y is a solution, then:

$$y(x) = 3x \qquad \text{أو} \qquad y(x) = 3x - \frac{6x}{1 + Ae^{-3x^2}} \qquad \text{حيث } A \geq -1.$$

على العكس من ذلك ، إذا كان y معرف، فإن y معرف و من الصنف $\mathcal{C}^1$ على المجال $]0, \infty[$، ويمكننا التحقق من أنه حل.

Conversely, if y is defined, then y is defined and of class $\mathcal{C}^1$ on the interval $]0, \infty[$, and we can verify that it is a solution.

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

لتكن المعادلة التفاضلية التالية

Let the following differential equation

$$y'' + 2y = 0$$

1) حل هذه المعادلة.
Solve this equation.

2) أوجد الدالة f التي تحقق حلا للمعادلة التفاضلية السابقة والتي تحقق الشروط التالية: $f(0) = 1$ و $f'(0) = -2$.
Find the function f that solves the previous differential equation and that satisfies the following conditions: $f(0) = 1$ and $f'(0) = -2$.

الحــل

1) تكتب المعادلة من الشكل :

Write the equation in the form:

$$y'' + \left(\sqrt{2}\right)^2 y = 0$$

ومنه حلولها هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ التي تأخذ الشكل:

and its solutions are the functions defined on $\mathbb{R}$ that take the form:

$$\alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2) الدالة f التي تحقق حلا للمعادلة التفاضلية السابقة والتي تحقق الشروط التالية: $f(0) = 1$ و $f'(0) = -2$ أي يوجد $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ حيث:

The function f that achieves a solution to the previous differential equation and that fulfills the following conditions: $f(0) = 1$ and $f'(0) = -2$, i.e. there is $alpha, \beta \in \mathbb{R}$ where:

$$f(x) = \alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x \Longrightarrow f(0) = \alpha = 1$$

و

$$f'(x) = \sqrt{2}\beta \cos \sqrt{2}x - \sqrt{2}\alpha \sin \sqrt{2}x \Longrightarrow \sqrt{2}\beta = -2 \Longrightarrow \beta = -\sqrt{2}$$

أي الدالة التي تحقق الشرطين هي:

Which function satisfies both conditions is:

$$f(x) = \cos \sqrt{2}x - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x.$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية:

Find the solutions to the following differential equations:

1) $y'' - 3y' + 2y = e^x.$
2) $y'' - y = -6 \cos x + 2x \sin x.$
3) $4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}.$

الحــل

لتكن المعادلة:

Let the equation:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

كثير الحدود المميز:

the characteristic polynomial is

$$f(r) = (r-1)(r-2)$$

وبالتالي فإن حلول المعادلة المتجانسة هي جميع الدوال:

So the solutions to the homogeneous equation are all functions:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad \text{حيث} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

نبحث عن حل خاص من الشكل $y_p(x) = P(x)e^x$ **نحن في الحالة** $(ıı)$ **الشرط** $(*)$ **على** P **هو :** $P'' - P' = 1$ **و** $P(x) = -x$ **محقق.**

We are looking for a special solution of the form $y_p(x) = P(x)e^x$. We are in the condition $(ıı)$ $(*)$ over P is : $P'' - P' = 1$ and $P(x) = -x$ verifies:

لذلك فإن حلول المعادلة هي الدوال من الشكل:

Therefore, the solutions to the equation are functions of the form:

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2 e^{2x} \quad \text{where} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x$. **هنا**

$0 = (r-1)(r+1)$ **المعادلة المتجانسة لها حلول من الشكل:**

Here $0 = (r-1)(r+1)$ the homogeneous equation has solutions of the form:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad \text{where} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

نلاحظ أن الدالة $3\cos x$ **تحقق المعادلة :** $y'' - y = -6\cos x$، **لذلك علينا إيجاد حل** y_1 **للمعادلة** $y'' - y = 2x\sin x$ **لأن** $y_p(x) = 3\cos x + y_1(x)$ **سيكون حلاً للمعادلة المدروسة. لهذا، نلاحظ أن** $2x\sin x = \mathrm{Im}(2xe^{ix})$ **ونستخدم الطريقة الموضحة أعلاه لإيجاد حل** z_1 **للمعادلة :** $y'' - y = 2xe^{ix}$. **نبحث عن** z_1 **على الشكل** $P(x)e^{ix}$ **حيث** P **هي كثيرة الحدود من الدرجة 1 لأن** $f(i) = -2 \neq 0$. **لدينا** $f'(i) = 2i$ **الشرط** $(*)$ **على** P **ومنه :** $2iP'(x) - 2P(x) = 2x$ **الذي يعطي بعد التعريف** $P(x) = -x - i$.
ومنه

We note that the function $3\cos x$ satisfies the equation: $y'' - y = -6\cos x$, so we need to solve y_1 for the equation $y'' - y = 2x\sin x$ because $y_p(x) = 3\cos x + y_1(x)$ will be a solution to the studied equation. For this, we note that $2x\sin x = \mathrm{Im}(2xe^{ix})$ and we use the above method to solve z_1 for the equation: $y'' - y = 2xe^{ix}$. We are looking for z_1 of the form $P(x)e^{ix}$ where P. It is a polynomial of degree 1 because $f(i) = -2 \neq 0$. we've got $f'(i) = 2i$ condition $(*)$ on P, from which: $2iP'(x) - 2P(x) = 2x$ which gives the definition dimension $P(x) = -x - i$. Then

$$y_1(x) = \mathrm{Im}((-x+i)e^{ix}) = -x\sin x - \cos x.$$

وبالتالي فإن الحلول هي الدوال:

So the solutions are functions:

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + 2\cos x - x\sin x \quad \text{where} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

طريقة أخرى لإيجاد حل لـ $y''-y = 2x\sin x$ **: نبحث عن الحل من الشكل** $y_1(x) = A(x)\sin x+B(x)\cos x$ **حيث** A, B **هي كثيرات الحدود من الدرجة** 1 **لأن** i **ليس جذر المعادلة المميزة نحسب** y_1'، y_1'' **ونطبق المعادلة المدروسة على** y_1 ... **نتحصل على الشرط :**

$$(A'' - A - 2B')\sin x + (B'' - B - 2A') = 2x\sin x$$

الذي يتحقق إذا كان :

Another way to solve for $y'' - y = 2x\sin x$: We look for the solution from the form $y_1(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x$ where A, B are polynomials of degree 1 because i is not the root of the characteristic equation. We calculate y_1', y_1'' and apply the studied equation to y_1 ...we get the condition:

$$(A'' - A - 2B')\sin x + (B'' - B - 2A') = 2x\sin x$$

which is achieved if:

$$\begin{cases} A'' - A - 2B' = 2x \\ B'' - B - 2A' = 0 \end{cases}.$$

ونكتب: $A(x) = ax + b$ **و** $B(x) = cx + d$، **بعد التحديد نحصل :** $a = d = -1$، $b = c = 0$ **الذي يحدد** y_1.

And we write: $A(x) = ax + b$ et $B(x) = cx + d$, after defining we get: $a = d = -1$, $b = c = 0$ which defines y_1.

$.4y'' + 4y' + 5y = \sin xe^{-\frac{x}{2}}$

المعادلة المميزة لها جذران مركبان $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ و $r_2 = \overline{r_1}$ وحلول المعادلة المتجانسة هي:

The characteristic equation has two complex roots $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ and $r_2 = \overline{r_1}$. The solutions to the homogeneous equation are:

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) \quad \text{where} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

لدينا

$$\sin xe^{-\frac{x}{2}} = \mathrm{Im}(e^{(-\frac{1}{2}+i)x}),$$

نبدأ بالبحث عن حل z_p من المعادلة مع الطرف الثاني الجديد $.e^{(-1/2+i)x}$ لأن $-\frac{1}{2} + i$ هو جذر المعادلة المميزة ، نبحث عن:

we've got

$$\sin xe^{-\frac{x}{2}} = \mathrm{Im}(e^{(-\frac{1}{2}+i)x}),$$

We start by finding the solution to the z_p of the equation with the new second side $e^{(-1/2+i)x}$. Because $-\frac{1}{2} + i$ is the root of the characteristic equation, we look for:

$$z_p(x) = P(x)e^{(-\frac{1}{2}+i)x}$$

حيث P من الدرجة 1. وبالتالي الشرط $(*)$ على P :

Where P is of degree 1. Hence the condition $(*)$ on P :

$$4P'' + f'(-1/2 + i)P' + f(-1/2 + i)P = 1$$

Writes **يكتب :**

$$8iP' = 1(P'' = 0 \quad f(-\frac{1}{2} + i) = 0 \;\; \text{و} \;\; f'(-\frac{1}{2} + i) = 8i)$$

لذلك يمكننا أن نأخذ $P(x) = -i/8x$ و $z_p(x) = -\frac{i}{8}xe^{(-\frac{1}{2}+i)x}$ ومن هنا الجزء التخيلي:

So we can take $P(x) = -i/8x$ and $z_p(x) = -\frac{i}{8}xe^{(-\frac{1}{2}+i)x}$ Hence the imaginary part is:

$$y_p(x) = \mathrm{Im}(-\frac{i}{8}xe^{(-\frac{1}{2}+i)x}) = \frac{1}{8}x\sin xe^{-\frac{x}{2}}$$

هو حل معادلتنا. لذلك فإن الحلول هي جميع الدوال من الشكل :

is the solution to our equation. So the solutions are all functions of the form:

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}(c_1\cos x + (c_2 + \frac{1}{8}x)\sin x) \quad \text{where} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$