تدخل المعادلات الخطية من خلال تطبيقاتها في العديد من السياقات، لأنها تشكل الأساس الحسابي للجبر الخطي. كما أنها تسمح بمعالجة جزء كبير من نظريات الجبر الخطي في الفضاءات ذات الأبعاد المنتهية.

Linear equations, through their applications in many contexts, as they form the computational basis of linear algebra. It also allows the treatment of a large part of the theories of linear algebra in finite-dimensional spaces.

لهذا سوف نُخَصّص هذا الجزء لموضوع الجمل الخطية ذات عدد كيفي من المعادلات أو من المجاهيل. وسوف ندرس عدة طرق لحل مثل هذه الجمل مع بعض الأمثلة العددية لشرح المراحل المتبعة أثناء الحل لكل طريقة.

Therefore, we will devote this part to the topic of linear sentences with an arbitrary number of equations or variables. We will study several ways to solve such systems with some numerical examples to explain the stages followed during the solution for each method.

1.3 جمل المعادلات الخطية *Linear equations system*

في كل ما سيأتي من هذا الفصل، نعتبر الحقل التبديلي $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.

In all that follows in this chapter, we consider the commutative field $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$

1.1.3 : Definition - تعريف

نسمي جملة خطية ذات n معادلة و m مجهول أو جملة خطية ذات معاملات من الحقل $\mathbb{K}$، كل جملة معادلات من الشكل:

We call a linear system with n equations and m unknowns or a linear system with coefficients in the field $\mathbb{K}$, each system of equations of the form:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

حيث من أجل كل $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq p$ المعاملات a_{ij} و b_i من $\mathbb{K}$. الشعاع

where for each $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j \leq p$ the coefficients are a_{ij} and b_i of $\mathbb{K}$. The vector:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$$

يحقق جميع المعادلات المكونة للجملة S، و يسمى حلاً للجملة S.

it satisfies all the equations that make up the system S, and is called a solution to the system S.

الشعاع :

The vector:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

فيسمى الطرف الثاني للجملة الخطية S.

is called, the second term of the linear system S.

We call the set   **نسمى المجموعة**

$$\mathcal{H}(S) = \{x \in \mathbb{K}^p, \ \ S \text{ حل للجملة } x \ (x \textit{ system solution of } S) \ \ \}$$

The system solution set (S).   **مجموعة حلول الجملة** (S).

1.1.3 حالات خاصة Special cases

1) **إذا كان :** $n = p$، **فإن الجملة** S **تسمى جملة مربعة.**

If: $n = p$, then the system S is called a square system.

2) **إذا كان :** $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$، **فإننا نسمي الجملة** S **جملة متجانسة، وعندئذ ترمز للجملة بالرمز** S_0 **ذات** n **معادلةً و** p **مجهول :**

If: $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, then we call the system S a homogeneous system, then we denote the system by S_0 with n equations and p unknowns :

$$(S_0)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

الجملة المتجانسة المُرافقة للجملة الخطية S.

The homogeneous system associated to the linear system S.

2.1.3 : Definition - تعريف

نقول عن جملتين $S1$ و $S2$ أنهما متكافئتان إذا كان لهما نفس مجموعة الحلول، أي

Two systems $S1$ and $S2$ are equivalent if they have the same set of solutions, ie.:

$$\mathcal{H}(S1) = \mathcal{H}(S2).$$

2.1.3 Matrix form of linear system الشكل المصفوفي لجملة خطية

3.1.3 : Definition - تعريف

ليكن n و p عددان طبيعيان غير معدومين. ولتكن الجملة الخطية التالية

Let n and p two non-zero natural numbers. Let the following linear system

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

we put نضع

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

نسمي المصفوفة A بمصفوفة الجملة الخطية (S) و X بشعاع الحلول و B الطرف الثاني للجملة. ومنه ينتج لدينا الكتابة:

The matrix A is called the matrix of the linear system (S), X is called the solution vector, and B is called the second term of the system. Hence we have writing:

$$AX = B$$

أي يمكن أن نكتب

Which we can write

$$(S^*)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

نسمي S^* بالكتابة المصفوفية للجملة الخطية (S).

S^* is called the matrix form of the linear system (S).

2.3 حل الجمل الخطية Solving linear systems

1.2.3 طريقة التعويض Substitution method

لمعرفة ما إذا كان هناك حل واحد أو أكثر لجملة خطية، ولحساب الحلول، فإن الطريقة الأولى هي طريقة التعويض. على سبيل المثال بالنسبة لجملة الخطية التالية:

To find out if there are more than one solutions to a linear system, and to calculate the solutions, the first method is the substitution method. For example let the following linear system:

$$(S)\begin{cases} 3x + 2y &= 1 \\ 2x - 7y &= -2 \end{cases}$$

نعيد كتابة السطر الأول $3x + 2y = 1$ على الشكل التالي $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$ نستبدل أو نعوض y في المعادلة الثانية بالعبارة $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$ نتحصل على جملة مكافئة :

We rewrite the first line $3x+2y=1$ in the following form $y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x$. We replace or substitute y in the second equation with $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x$. We get an equivalent system:

$$\begin{cases} y &= \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x \\ 2x-7(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x) &= -2 \end{cases}$$

المعادلة الثانية تحتوي على المتغير x فقط، ويمكننا حلها بكل بساطة:

The second equation contains only the variable x, and we can solve it very simply:

$$\begin{cases} y &= \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x \\ (2+7\cdot\frac{3}{2})x &= -2+\frac{7}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y &= \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x \\ x &= \frac{3}{25} \end{cases}$$

يبقى فقط تعويض قيمة x التي تم الحصول عليها في المعادلة الأولى:

It remains only to substitute the obtained value of x into the first equation:

$$\begin{cases} y &= \frac{8}{25} \\ x &= \frac{3}{25} \end{cases}$$

ومنه الجملة تقبل حلا وحيدا $(\frac{3}{25},\frac{8}{25})$. ومنه مجموعة الحلول هي :

Hence, the system accepts a single solution $(\frac{3}{25},\frac{8}{25})$. Then the solutions set is:

$$\mathcal{H}(\mathcal{S})=\left\{\left(\frac{3}{25},\frac{8}{25}\right)\right\}.$$

2.2.3 Cramer's method طريقة كرامر

نأخذ حالة جملة خطية بسيطة كي نفهم أكثر طريقة حل جملة خطية بواسطة طريقة كرامر لهذا، ليكن

We take the case of a simple linear system in order to understand more how to solve a linear system by Cramer's method, so for this let

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

محدد الجملة الخطية ذات المعادلتين و المجهولين.

The determinant of the linear system with two equations and the two unknowns.

$$\begin{cases} ax+by &= e \\ cx+dy &= f \end{cases}$$

إذا كان $ad-bc\neq 0$، نجد حلاً وحيدا إحداثياته (x,y) هي :

If $ad-bc\neq is0$, we find a unique solution whose coordinates (x,y) are:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{ad-bc},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{ad-bc}$$

بالنسبة لحساب الإحداثية الأولى x ، نستبدل العمود الأول بالطرف الثاني للمعادلة و بالنسبة للإحداثية الثانية y ، نستبدل العمود الثاني بالطرف الثاني للمعادلة.

For calculating the first coordinate x, we replace in the determinant the first column with the second side of the equation and for the second coordinate y we replace the second column with the second side of the equation.

1.2.3 : Example - مثال

Let the system لتكن الجملة

$$\begin{cases} tx-2y &= 1 \\ 3x+ty &= 1 \end{cases}$$

حسب قيم الوسيط $t\in\mathbb{R}$. محدد الجملة هو:

according to intermediate values $t\in\mathbb{R}$. The system determinant is:

$$\Delta=\begin{vmatrix} t & -2 \\ 3 & t \end{vmatrix}=t^2+6$$

لا ينعدم ولهذا يوجد حل وحيد والجملة الخطية هي جملة كرامر، الحل (x,y) يحقق:

It does not zero, for this there is only one solution and the linear system is Cramer's system, *the solution (x, y) achieves:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & t \end{vmatrix}}{t^2+6} = \frac{t+2}{t^2+6}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} t & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{t^2+6} = \frac{t-3}{t^2+6}.$$

For each t the solutions set is: من أجل كل t مجموعة الحلول هي:

$$\mathcal{H}(\mathcal{S}) = \left\{ \left(\frac{t+2}{t^2+6}, \frac{t-3}{t^2+6} \right) \right\}.$$

3.2.3 طريقة غـوص Gauss's method

بفضل استعمال العمليات الأساسية على أسطر المصفوفة A، تعتبر طريقة غوص طريقة منهجية تسمح بتحويل الجملة الخطية S إلى جملة خطية أخرى S' مكافئة لها بحيث تكون مصفوفة الجملة الخطية الجديدة مثلثية علوية (فقط، وليس بالضرورة قطرية كما في طريقة غوص - جوردان)، وكل عناصرها القطرية غير معدومة (ليس ضروريا أن تكون مساوية لـ 1). طريقة غوص تسعى إلى جعل جميع عناصر المصفوفة التي تقع أسفل القطر الرئيسي معدومة أي أن للجملة الخطية مصفوفة متدرجة.

With the help of basic processes on the lines of the matrix A, the Gauss's method is a systematic method that allows the conversion of the linear system S into another linear system S' equivalent to it, so that the matrix of the new linear system is upper triangular (only, not necessarily diagonal as in the method Gauss-Jordan), and all its diagonal elements are not-zero (it doesn't have to be equal to 1). A Gauss's method seeks to make all elements of the matrix below the main diagonal zero, i.e. the linear system has a gradient matrix.

وقبل أن نبدأ، نذكر بعض التحويلات الأولية التي يمكننا تطبيقها على جملة المعادلات بحيث نحصل على جملة معادلات مكافئة، أي لها نفس الحل، وهذه التحويلات هي:

Before we start, we mention some elementary transformations that we can apply to a system of equations so that we get an equivalent system of equations, that is, they have the same solution, and these transformations are:

- **تبديل معادلتين: وهذا واضح أنه لا يغير الحل.**

Substituting two equations: This obviously does not change the solution.

- ضرب طرفي معادلة بعدد غير معدوم: إذا كان لدينا طرفان متساويان فإنه بضرب كل طرف بنفس العدد سنحصل أيضا على طرفين متساويين.

Multiplying both sides of an equation by a non-null number: If we have two equal sides, then by multiplying each side by the same number, we will also get two equal sides.

- جمع معادلة مضروبة بعدد مع معادلة أخرى.

Adding an equation multiplied by a number with another equation.

إن مبدأ طريقة غوص هو تحويل جملة المعادلات الخطية

The principle of the Gauss method is to transform the system of linear equations.

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

إلى جملة معادلات مكافئة من الشكل :

into a system of equivalent equations of the form:

$$(S')\begin{cases} c_{11}x_1 & +c_{12}x_2 & +\cdots & +c_{1n}x_n & = d_1 \\ & +c_{22}x_2 & +\cdots & +c_{2n}x_n & = d_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & +c_{nn}x_n & = d_n \end{cases}$$

أي تحويل جملة المعادلات إلى شكل مثلثي يسهل معه حساب قيم المتغيرات. ففي جملة المعادلات المكافئة، من المعادلة الأخيرة نحصل علىx_p بسهولة، ونعوضها في المعادلة الماقبل أخيرة لنحصل على x_{p-1} ونعوض القيمتين في المعادلة التي قبلها لنحصل على المتغير الذي ما قبله وهكذا حتى نصل للمعادلة الأولى فنعوض جميع القيم التي تحصلنا عليها كي نجد قيمة x_1.

That is, converting the system of equations into a trigonometric form, with which it is easy to calculate the values of the variables. Then the equivalent equations, from the last equation we get x_p easily, and we substitute it into the next last equation to get x_{p-1} and we substitute the two values in the equation before it to get the variable before it and so on until we reach the first equation, so we substitute all the values that we got to find the value of x_1.

Make transfers إجراء التحويلات

بفرض a_{11} لا يساوي الصفر : إذا قسمنا المعادلة الأولى من جملة المعادلات S الأولى على a_{11} و ضربناها في a_{21} ثم طرحناها من المعادلة الثانية ونطبق نفس الطريقة على بقية المعادلات حسب الصيغة التالية:

Assuming that a_{11} is not equal to zero: If we divide the first equation from the first system of equations S by a_{11} and multiply it by a_{21}, then we subtract it from the second equation and apply the same method to the rest of the equations according to following formula:

$$\boxed{a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{1j} \cdot a_{i1}}{a_{11}}, i, j = 2, ..., n}$$

فإن كان $a_{11} = 0$ نقوم عندها بتبديل المعادلة الأولى مع أي من المعادلات التي تليها بحيث يكون الحد $a_{i1} \neq 0$ حيث i هو رقم السطر. فإن لم نجد، وكانت كلها تساوي الصفر عندها تكون جملة المعادلات الخطية ليس لها حل وحيد، والسبب أن إحدى المعادلات (أو أكثر) مرتبطة خطيا بمعادلات أخرى. بعد هذا التحويل نحصل على جملة خطية من الشكل:

If $a_{11} = 0$ then we swap the first equation with any of the following equations so that the term is $a_{i1} \neq 0$ where i is the line number. If we do not find, and they are all equal to zero, then the total linear equations do not have a single solution, and the reason is that one of the equations (or more) is linearly linked to other equations. After this transformation we get a linear system of the form:

$$(S^{(1)}) \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = d_1 \\ & +a_{22}^{(1)}x_2 & +\cdots & +a_{2n}^{(1)}x_n & = d_2^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & +a_{n2}^{(1)}x_2 & & +a_{nn}^{(1)}x_n & = d_n^{(1)} \end{cases}$$

وهكذا حذفنا الحد الأول من جميع المعادلة بعد المعادلة الأولى. نكرر العملية بأن نثبت المعادلة الأولى وونعمل على باقي المعادلات بنفس الطريقة الأولى أي أننا نقسم المعادلة الثانية (الجديدة) على محورها وهو $a_{22}^{(1)}$ ونضربها بـ $a_{32}^{(1)}$ ونطرحها من الثالثة وهكذا بنفس المنوال مع البقية حسب الصيغة التالية :

And so we cancel the first term from all equation after the first equation. We repeat the process by fixing the first equation and working on the rest of the equations in the same way as the first, that is, we divide the second (new) equation on its axis, which is $a_{22}^{(1)}$ and multiply it by $a_{32}^{(1)}$ and subtract it from the third and so on in the same way with the rest according to the following formula:

$$\boxed{a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{2j}^{(1)} \cdot a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, i, j = 3, ..., n}$$

وهكذا حذفنا الحد الثاني أيضا من جميع المعادلة بعد المعادلة الثانية. نواصل العملية بنفس المنوال حتى نتحصل على جملة مثلثية والصيغة العامة في التحويلات في هذه الحالة تكون كما يلي:

Thus, we have eliminated the second term as well from all equation after the second equation. We continue the process in the same way until we get a trigonometric system, and the general formula for transformations in this case is as follows:

$$\boxed{a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{kj}^{(k-1)} \cdot a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, k = 1, ..., n-1, i, j = k+1, ..., n.}$$

2.2.3 : Example - مثال

لنستعمل طريقة غوص لإيجاد حلول الجملة :

Let's use the Gauss method to find the solutions of the system:

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 3 \\ x + 2y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 0 \end{cases}$$

and we write: ونكتب :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 & L_1 \\ x + 2y + z = 1 & L_2 \\ 2x + y + z = 0 & L_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 3 & \\ y - z = -2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y - 3z = -6 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ y-z &= -2 \\ -4z &= -8 \quad L_2 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -1 \\ y &= 0 \\ z &= 2 \end{cases}$$

4.2.3 طريقة انعكاس المصفوفة Matrix inversion method

الجملة الخطية بالشكل المصفوفي A linear system in matrix form

$$\begin{cases} ax+by &= e \\ cx+dy &= f \end{cases}$$

تكافئ equivalent to

$$AX = Y \qquad \text{حيث} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

إذا كان محدد المصفوفة A غير معدوم ، أي إذا $ad-bc \neq 0$، فإن المصفوفة A عكوسة أو قابلة للقلب و

If the determinant of A is non-null, i.e. if $ad-bc \neq 0$, then the matrix A is invertible and

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

و الحل الوحيد $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ للجملة يكتب من الشكل:

and the only solution is $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ for the system write of the form:

$$X = A^{-1}Y.$$

3.2.3 : Example - مثال

Let's solve the following linear system لنحل الجملة الخطية التالية

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+t^2y &= t \end{cases}$$

حسب قيم الوسيط $t \in \mathbb{R}$. محدد الجملة هو :

according to values of the intermediate $t \in \mathbb{R}$. The determinant of the system is:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{vmatrix} = t^2 - 1.$$

The first case: $t \neq +1$ and $t \neq -1$. 1) الحالة الأولى: $t \neq +1$ و $t \neq -1$.

then $t^2-1 \neq 0$. The matrix فإن $t^2-1 \neq 0$. المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{pmatrix}$$

invertible and his inverse is علوسة ومقلوبها

$$A^{-1} = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

and the solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ is of the form والحل $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ من الشكل

$$X = A^{-1}Y = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2-t \\ t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{t+1} \\ \frac{1}{t+1} \end{pmatrix}.$$

من أجل كل $t \neq \pm 1$ مجموعة الحلول هي

For each $t \neq \pm 1$ the solutions set is

$$\mathcal{H}(\mathcal{S}) = \left\{ \left(\frac{t}{t+1}, \frac{1}{t+1} \right) \right\}$$

.

2) الحالة الثانية: $t = +1$. الجملة الخطية تكتب على الشكل:

The second case: if $t = +1$. The linear system is written in the form:

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

والمعادلتان متطابقتان. هناك عدد غير منته من الحلول:

The two equations are identical. There are an infinite number of solutions:

$$\mathcal{H}(\mathcal{S}) = \{(x, 1 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

3) الحالة الثالثة: $t = -1$. الجملة الخطية تكتب على الشكل:

The third case: if $t = -1$. The linear system is written in the form:

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ x + y &= -1, \end{cases}$$

من الواضح أن المعادلتين غير متوافقتين وبالتالي

It is clear that the two equations are not compatible thus

$$\mathcal{H}(\mathcal{S}) = \varnothing.$$

3.3 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 3*

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

حل الجمل الخطية التالية باستعمال طريقة غوص:

Solve the following linear system using the Gauss method:

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = & 3 \\ x & +2y & +z & = & 1 \\ 2x & +y & +z & = & 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & & +2z & = & 1 \\ & -y & +z & = & 2 \\ x & -2y & & = & 1 \end{cases}.$$

Solution - الحـــل