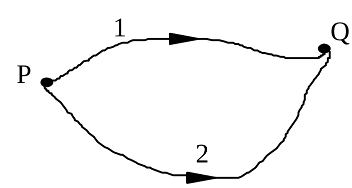
5.1 Potential energy and conservation energy

درسنا في الفصل السابق مفهوم طاقة الحركة ***Kinetic energy*** لجسم متحرك ووجدنا أن طاقة حركة الجسم تتغير عندما يبذل شغل على الجسم. سندرس في هذا الفصل نوعاً آخر من أنواع الطاقة الميكانيكية وهو طاقة الوضع ***Potential energy***. ويمكن لطاقة الوضع أن تتحول إلى طاقة حركة أو إلى بذل شغل. وتجدر الإشارة هنا إلى أن أنواع القوى التي درسناها هي إما قوة عجلة الجاذبية الأرضية (F_g) أوقوة الاحتكاك (f) أوقوة الشد (T) أوالقوة المؤثرة الخارجية (F_{app})، هذه القوى تقسم إلى نوعين، إما قوى محافظة ***conservative forces*** أو قوى غير محافظة ***non-conservative***. فإذا كان **الشغل** الناتج عن قوة ما لا يعتمد على المسار فإن هذه القوة تكون **محافظة**، أما إذا كان **الشغل** يعتمد على المسار فإن هذه القوة تكون **غير محافظة**.

5.2 Conservative forces

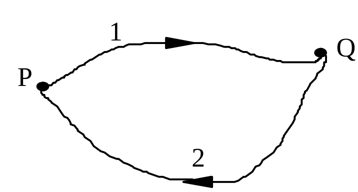
A force is conservative when the *work* done by that *force* acting on a particle moving between two points is *independents* of the path the particle takes between the points.

$$W_{PQ}(\text{along } 1) = W_{PQ}(\text{along } 2)$$



The total work done by a conservative force on a particle is zero when the particle moves around any closed path and returns to its initial position.

$$W_{PQ}(\text{along } 1) = -\,W_{PQ}(\text{along } 2)$$



- **Types of forces**
  - **Conservative force**
    - **Work independent of the path**
      - **Force of Gravity**
  - **Non Conservative force**
    - **Work dependent of the path**
      - **Force of Friction**

تعتبر قوة الجاذبية الأرضية مثالاً على القوة المحافظة، فعند نقل جسم من موضع إلى آخر فإن الشغل المبذول يعتمد على القوة mg وعلى الإزاحة بين نقطتي البداية والنهايـــة، ولا يعتمد الشغل على المسار فإذا كانت نقطة البداية والنهاية لها نفس الارتفاع عــن ســطح الأرض فإن الشغل يكون صفراً.

الشغل لا يعتمد على المسار عند نقل جسم من موضع آخر لأن قوة الجاذبية الأرضية قوة محافظة.

$$W_g = - mg (y_f - y_i)$$

كما وأن القوة الاسترجاعية للزنبرك قوة محافظة حيث أن الشغل يعتمد على نقطتي البداية والنهاية فقط ولا يعتمد على المسار، وقد لاحظنا في الفصل السابق أن الشـــغل المبـــذول بواسطة الزنبرك يساوي صفراً في حركة الزنبرك دورة كاملة حيث يكــون فيهـــا نقطـــة النهاية هي العودة إلى نقطة البداية.

5.3 Potential energy

When the work done by conservative force we found that the work does not depend on the path taken by the particle. Therefore we can define a new physical quantity called the change in potential energy ΔU.

The Change potential energy is defined as

$$\Delta U = (-W) = U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx \qquad (5.1)$$

علمنا سابقاً أن الشغل يساوى التغير في طاقة الحركة، ولكن إذا تحرك جسم تحت تأثير قوة محافظة مثل قوة عجلة الجاذبية الأرضية إزاحة محددة فإن الشغل هنا يعتمد على نقطتي البداية والنهاية ولا يعتمد على المسار. وهنا لا نستطيع القول أن الشغل يساوى التغير في طاقة الحركة. فمثلاً إذا حاول شخص رفع كتلة ما من سطح الأرض إلى ارتفاع معين قدره h فإن هذا الشخص سيبذل شغلاً موجباً مساوياً لـ mgh لان القوة التي بذلها في اتجاه الحركة، ولكن من وجهة نظر الجسم فإنه بذل شغلاً سالباً قدره $-mgh$ وذلك لأن قوته (وزنه) في عكس اتجاه الإزاحة، هذا الشغل السالب يدعى طاقة الوضع التي اكتسبها الجسم عند تحريكه من نقطة إلى أخرى تحت تأثير قوة محافظة (قوة عجلة الجاذبية الأرضية).

5.4 Conservation of mechanical energy

لنفترض وجود جسم يتحرك في بعد واحد x تحت تأثير قوة محافظة F_x، فإن الشغل المبذول بواسطة القوة يساوي التغير في طاقة حركة الجسم.

$$W = \Delta K = -\Delta U \qquad (5.2)$$

$$\Delta K = -\Delta U \qquad (5.3)$$

$$\Delta K + \Delta U = \Delta(K + U) = 0 \qquad (5.4)$$

This is the law of conservation of mechanical energy, which can be written as

$$K_i + U_i = K_f + K_f \qquad (5.5)$$

Law of conservation mechanical energy

5.5 Total mechanical energy

لنعرف الطاقة الميكانيكية الكلية ***Total mechanical energy*** بحاصل جمع طاقة الحركة وطاقة الوضع للجسم.

$$\boldsymbol{E = K + U}$$

طاقة الوضع

الطاقة الميكانيكية الكلية

طاقة الحركة

ومن هنا يمكن كتابة قانون الحفاظ على الطاقة الميكانيكية على النحو التالي:

$$\boldsymbol{E_i = E_f}$$

Law of conservation mechanical energy

The law of conservation of mechanical energy states that the total mechanical energy of a system remains constant for conservative force only. This means that when the kinetic energy increased the potential energy decrease.

Examples

Example 5.1

A 0.2 kg bead is forced to slide o a frictionless wire as in the Figure. The bead starts from rest at A and ends up at B after colliding with a light spring of force constant *k*. If the spring compresses a distance of 0.1 m, what is the force constant of the spring?

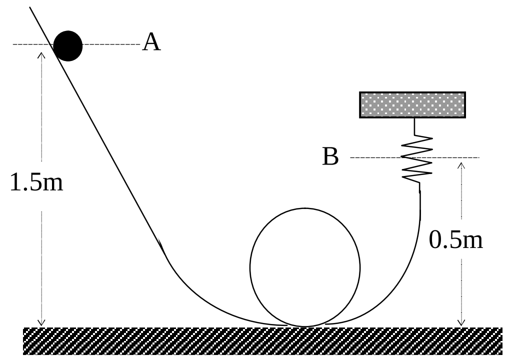


Figure 5.1

Solution

The gravitational potential energy of the bead at A -with respect to the lowest point is

$$U_i = mgh_i = (0.2\ \text{kg})\ (9.8\ \text{rn/s}^2)\ (1.5\ \text{m}) = 2.94\ \text{J}$$

The kinetic energy of the bead at A is zero since it starts from rest. The gravitational potential energy of the bead at B is

$$U_f = mgh_f = (0.2\ \text{kg})\ (9.8\ \text{m/s}^2)\ (0.5\ \text{m}) = 0.98\ \text{J}$$

Since the spring is part of the system, we must also take into account the energy stored in the spring at B. Since the spring compresses a distance x_m = 0.1m, we have

$$U_S = \frac{1}{2}\,k\,x_m^2 = \frac{1}{2}\,k\,(0.1)^2$$

Using the principle of energy conservation gives

$$U_i = U_f + U_s$$

$$2.94\ \text{J} = 0.98\ \text{J} + \frac{1}{2}\,k\,(0.1)^2$$

$$k = 392\ \text{N/m}$$

Example 5.2

A block of mass 0.2 kg is given an initial speed v_o = 5 m/s on a horizontal, rough surface of length 2m as in Figure 5.2. The coefficient of kinetic friction on the horizontal surface is 0.30. If the curved part of the track is frictionless, how high does the block rise before coming to rest at B?

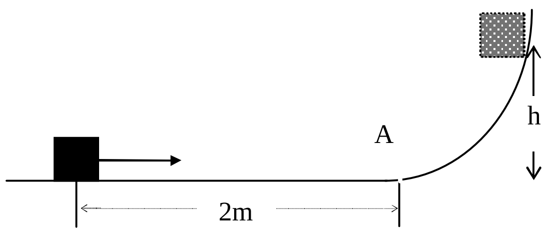


Figure 5.2

Solution

The initial kinetic energy of the block is

$$K_o = \frac{1}{2}\, mv^2 = \frac{1}{2}\,(0.2\text{kg})\,(5\text{m/s})^2$$

$$= 2.50 \text{ J}$$

The work done by friction along the horizontal track is

$$W_f = -fd = -\mu mgd = -(0.30)\,(0.2)\,(9.8)\,(2) = -1.18 \text{ J}$$

Using the work-energy theorem, we can find the kinetic energy at A

$$W_f = k_A - K_o = K_A - 2.50$$

$$K_A = 2.50 + W_f = 2.50 - 1.18 = 1.32 \text{ J}$$

Since the curved track is frictionless, we can equate the kinetic energy of the block at A to its gravitational potential energy at B.

$$mgh = K_A = 1.32 \text{ J}$$

$$h = \frac{1.32\text{J}}{0.2\text{kg} \times 9.8\text{m/s}^2} = 0.673 \text{ m}$$

Example 5.3

A single conservative force $F_x = (2x + 4)$ N acts on a 5-kg particle, where x is in m. As the particle moves along the x axis from $x = 1$ m to $x = 5$ m, calculate (a) the work done by this force, (b) the change in the potential energy of the particle, and (c) its kinetic energy at $x = 5$ m if its speed at $x = 1$ m is 3 m/s.

Solution

$F_x = (2x + 4)$ N $\qquad x_i = 1$ m $\qquad x_f = 5$ m $\qquad v_i = 3$m/s

(a) $W_F = \int_{xi}^{xf} F_x dx = \int_{xi}^{xf} (2x+4)dx = \left[x^2 + 4x\right]_1^5 = 5^2 + 4(5) - [1^2 + 4(1)] = 40\text{J}$

(b) $\Delta U = -W_F = -40\text{J}$

(c) $\Delta K + \Delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta K = -\Delta U = -40.0$ J

$K_f - \frac{1}{2} m v_i^2 = 40\text{J}$

$K_f = 40.0\text{ J} + 22.5\text{ J} = 62.5\text{J}$

Example 5.4

A bead slides without friction around a loop-the-loop. If the bead is released from a $h = 3.5R$, what is its speed at point A? How large is the normal force on it if its mass is 5.0?

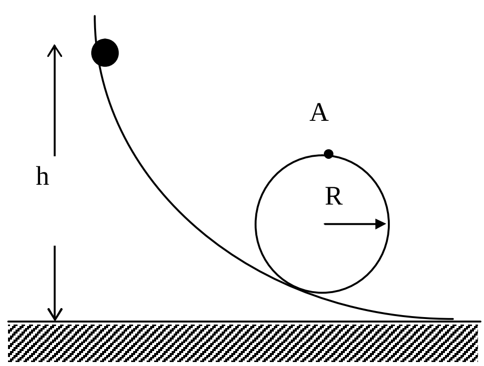


Figure 5.3

Solution

It is convenient to choose the reference point of potential energy to be at the lowest point of the bead's motion. Since $v_i = 0$ at the start,

$$E_i = K_i + U_i = 0 + mgh = mg(3.5R)$$

The total energy of the bead at point A can be written as

$$E_A = K_A + U_A = \frac{1}{2} m v_A^2 + mg(2R)$$

Since mechanical energy is conserved, $E_i = E_A$, and we get

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + mg(2R) = mg(3.5R)$$

$$v_A^2 = 3gR \quad \text{or } v_A = \sqrt{3gR}$$

To find the normal force at the top, it is use to construct a free-body diagram as shown, where both N and mg are downward Newton's second law gives

$$N + mg = \frac{mv_A^2}{R} = \frac{m(3gR)}{R} = 3mg \Rightarrow \qquad N = 3mg - mg = 2mg$$

وذلـك لأن عنـد النقطـة A الجسـم يتحرك على مسار دائري.

$$N = 2(5 \times 10^{-3}\ \text{kg}\ (9.80\text{m/s}^2) = 0.098\text{N}$$

Example 5.5

A 25-kg child on a swing 2 m long is released from rest when the swing supports make an angle of 30° with the vertical. (a) Neglecting friction, find the child's speed at the lowest position. (b) If the speed of the child at the lowest position is 2 m/s, what is the energy loss due to friction?

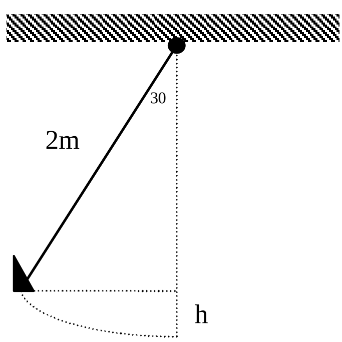


Figure 5.4

Solution

(a) First, note that the child falls through a vertical distance of h = (2 m) - (2 m) cos 30^{o} = 0.268 m

Taking U = 0 at the bottom, and using conservation of energy gives

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

$$v = \sqrt{2}gh = 29 \text{ m/s}$$

(b) If v_f = 2 m/s, and friction is present, then

$$W_f = \Delta K + \Delta U = (\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2) + 0 - mgh$$

$$W_f = -15.6\text{J}$$

Example 5.6

A block of mass 0.25kg is placed on a vertical spring of constant *k*=5000N/m, and is pushed downward compressing the spring a distance of 0.1 m. As the block is released, it leaves the spring and continues to travel upward. To what maximum height above the point of release does the block rise?

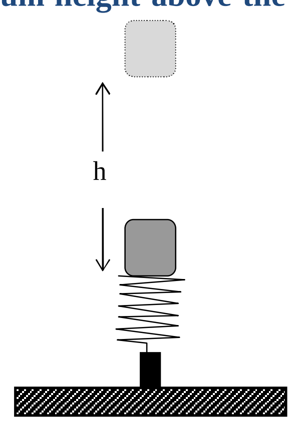


Figure 5.5

Solution

Taking $U_g = 0$ to be at the point of release, and noting that = v_i = 0, gives

$$E_i = K_i + U_i = 0 + (U_s + U_g)_i$$

$$E_i = \frac{1}{2}kx^2 + 0 = 25\text{J}$$

When the mass reaches its maximum height h, v_f = 0, and the spring is unstretched, so U_S = 0.

$$E_f = K_f + U_f = 0 + mgh = (0.25 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)\, h$$

Since mechanical energy is conserved, we have $E_f = E_i$, or

$$(0.25\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)h = 25\text{J}$$

$$h = 10.2\text{m}$$

Example 5.7

A ball whirls around in a vertical circle at the end of a string. If the ball's total energy remains constant, show that the tension in the string at the bottom is greater than the tension at the top by six times the weight of the ball.

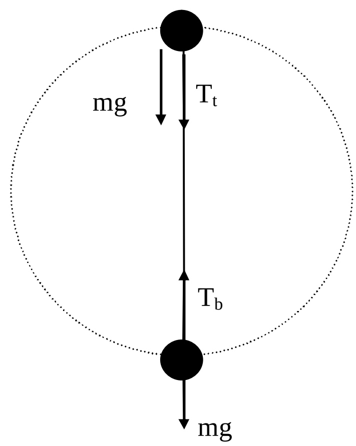


Figure 5.6

Solution

Applying Newton's second law at the bottom (b) and top (t) of the circular path gives

$$T_b - mg = \frac{mv_b^2}{R} \qquad (1)$$

$$T_t + mg = \frac{mv_t^2}{R} \qquad (2)$$

Subtracting (1) and (2) gives

$$T_b = T_t + 2mg + \frac{m(v_b^2 - v_t^2)}{R} \qquad (3)$$

Also, energy must be conserved; that is,

$$\Delta K + \Delta U = 0. \text{ So,}$$

$$\frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_t^2 + (0 - 2mgR) = 0$$

$$m\frac{(v_b^2 - v_t^2)}{R} = 4mg \qquad (4)$$

Substituting (4) into (3) gives

$$\boldsymbol{T_b = T_t + 6mg.}$$

Example 5.8

A 20kg block is connected to a 30kg block by a light string that passes over a frictionless pulley. The 30kg block is connected to a light spring of force constant 250N/m, as in shown in the Figure. The spring is unstretched when the system is as shown in the figure, and the incline is smooth. The 20kg block is pulled a distance of 20cm down the incline (so that the 30kg block is 40 cm above the floor) and is released from rest. Find the speed of each block when the 30kg block is 20cm above the floor (that is, when the spring is unstretched).

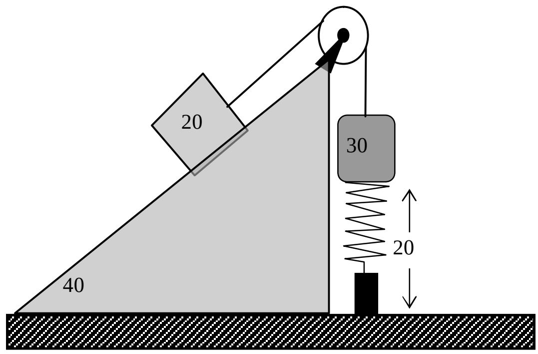


Figure 5.7

Solution

لحل هذا السؤال نفرض أن x هي المسافة التي استطال بها الزنبرك نتيجة لسحب الكتلة 20kg مسافة محددة وبالتالي فإن x=0.2m. وكذلك نفرض أن طاقة الوضع U_g=0 مقاسه عند أدنى قيمة للكتلة 20kg قبل تركها. فإذا كانت v هي سرعة الكتلتين عند مرورهما بموضع الاتزان قبل استطالة الزنبرك.

$$\Delta K + \Delta Us + \Delta Ug = 0$$

$$(K_f - K_i) + (U_{sf} - U_{si}) + (U_{gf} - U_{gi}) = 0$$

$$\left[\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - 0\right] + (0 - \frac{1}{2}kx^2) + (m_2 gx\sin\theta - m_1 gx) = 0$$

نعوض في المعادلة السابقة بالقيم ونحل المعادلة لحساب قيمة السرعة.

v = 1.24m/s

5.6 Non-conservative forces and the work-energy theorem

في حالة التعامل مع قوة غير محافظة مثل قوة الاحتكاك بالإضافة إلى قوى محافظة، فإننا لا نستطيع أن نستخدم القانون السابق والذي ينص على أن التغير في الطاقة الميكانيكية الكلية يساوى صفراً لأن هناك جزءً من الطاقة يضيع على شكل حرارة بواسطة الشغل المبذول نتيجة لقوة الاحتكاك. لذلك نحتاج إلى قانون أشمل وأعم ليشمل جميع أنواع القوى.

نعلم سابقا أن الشغل يساوى التغير في طاقة الحركة

$$W = \Delta K \qquad (5.6)$$

وحيث أن الشغل قد يكون مبذولاً بواسطة قوى محافظة W_c وأحياناً يكون الشغل مبذولاً بواسطة قوى غير محافظة يرمز له بالرمز W_{nc}.

$$W_{nc} + W_c = \Delta K \qquad (5.7)$$

وحيث أن الشغل بواسطة قوة محافظة W_c يساوى سالب التغير في طاقة الوضع.

$$W_{nc} + -\Delta U = \Delta K \qquad \Rightarrow \qquad W_{nc} = \Delta K + \Delta U$$

وهذا يعنى أن الشغل المبذول بواسطة قوة غير محافظة يساوى التغير طاقة الحركة بالإضافة إلى التغير في طاقة الوضع.

$$W_{nc} = (K_f + U_f) - (K_i + U_i) \qquad (5.8)$$

$$\boldsymbol{W_{nc} = E_f - E_i} \qquad (5.9)$$

وهذا يمثل القانون العام للعلاقة بين الشغل والطاقة والذي ينص على أن الشغل المبذول بواسطة قوة غير محافظة يساوى التغير الكلى في الطاقة الميكانيكية.

Example 5.9

A 3kg block slides down a rough incline 1m in length as shown in the figure. The block starts from rest at the top and experience a constant force of friction of 5N. the angle of inclination is 30°. (a) Use energy methods to determine the speed of the block when it reach the bottom of the incline.

Solution

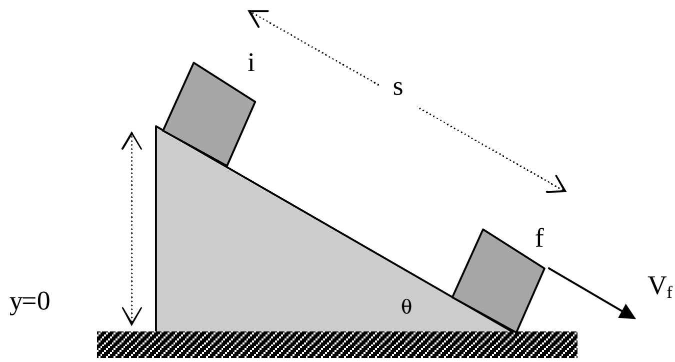


Figure 5.8

$W_{nc} = E_f - E_i$

$W_{nc} = (K_f + U_f) - (K_i + U_i)$

$-f\, s = (1/2\, mv^2 + 0) - (0 + mgh)$

ومن هذه المعادلة يمكن إيجاد السرعة النهائية للجسم المنزلق. كذلك لاحظ يمكن إيجـــاد السرعة النهائية باستخدام قانون نيوتن الثاني.