Département de Mathématiques
Université de Biskra
Module

2ème Année Master Maths
Premier semestre, année 2020/2021
Mouvement Brownien et calcul stochastique

DEVOIR
(A rendre le mercredi 10 mars 2021)

Exercice 1 *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien unidimensionnel et $\mathcal{F}_t$ la filtration engendré par B_t. Montrer que*

1

$$E\left[B_t^3 \mid \mathcal{F}_s\right] = B_s^3 + 3\,(t-s)\,B_s.$$

Exercice 2 *Montrer que les processus stochastiques suivants sont des martingales par rapport à $\mathcal{F}_t$, la filtration engendrée par le mouvement Brownien uni-dimensionnel B_t :*

1

1. $B_t^3 - 3tB_t$.
2. $B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$.

Exercice 3 *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien et Soit X_t l'intégrale stochastique*

$$X_t = \int_0^t e^{s-t}\,dB_s.$$

1. *Déterminer l'espérance $E\left[X_t\right]$ et la variance $var\left(X_t\right)$ de X_t.*
2. *Montrer qua la variable aléatoire*

2

$$Z_t = \sqrt{2\,(t+1)}\,X_{\log(t+1)/2}$$

admet la loi $Z_t \sim \mathcal{N}\left(0, t\right)$.

Exercice 4 *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard. Trouver $z \in \mathbb{R}$ et $\varphi_s(\omega)$ tel que*

$$F_t(\omega) = z + \int_0^t \varphi_s(\omega) dB_s$$

dans les cas suivants :

1
1. $F_t(\omega) = B_t^3(\omega)$.
2. $F_t(\omega) = \int_0^t B_s^3 ds$.

Exercice 5 *Soit X_t une solution de l'EDS*

$$\begin{aligned} dX_t &= (\alpha X_t + \beta)\, dt + (\sigma X_t + \gamma)\, dB_t \\ X_0 &= 0 \end{aligned}$$

où α, β, σ et γ sont des constantes et B est un mouvecemnt Brownien. De plus soit $S_t = e^{(\beta - \sigma^2/2)t + \sigma B_t}$.

1. *Trouver l'EDS satisfaite par S_t^{-1}.*

2
2. *Montrer que*

$$d(X_t S_t^{-1}) = (\beta - \sigma\gamma)\, S_t^{-1} dt + \gamma S_t^{-1} dB_t.$$

3. *Trouver la forme explicite de X_t.*

Corrigé type : Devoir à la maison

...cice 1 :

$$E(B_t^3 | \mathcal{F}_s) = E\left[(B_t - B_s + B_s)^3\right]$$

$$= E\left[(B_t - B_s)^3 + 3(B_t - B_s)^2 B_s + 3(B_t - B_s) B_s^2 + B_s^3 | \mathcal{F}_s\right]$$

$$= E\left((B_t - B_s)^3\right) + 3B_s E\left[(B_t - B_s)^2\right] + 3B_s^2 E(B_t - B_s) + B_s^3$$

$$= 0 + 3B_s(t-s) + 3B_s^2 \times 0 + B_s^3 = B_s^3 + 3B_s(t-s).$$

Exercice 2 :

① De l'exercice 1 on a :

$$E(B_t^3 | \mathcal{F}_s) = B_s^3 + 3(t-s)B_s$$

et puisque B_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale on trouve :

$$E(B_t^3 - 3t B_t | \mathcal{F}_s) = B_s^3 + 3(t-s)B_s - 3t B_s$$

$$= B_s^3 - 3s B_s.$$

ce qui prouve que $B_t^3 - 3t B_t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale

② $E[B_t^4 | \mathcal{F}_s]$:

$$E(B_t^4 | \mathcal{F}_s) = E\left[(B_t - B_s + B_s)^4 | \mathcal{F}_s\right] =$$

$$\left[(B_t - B_s)^4 + 4(B_t-B_s)^3 B_s + 6(B_t-B_s)^2 B_s^2 + 4(B_t-B_s)B_s^3 + B_s^4 \mid \mathcal{F}_s\right)$$

$$E\left[(B_t-B_s)^4\right] + 4B_s E\left[(B_t-B_s)^3\right] + 6B_s^2 E\left[(B_t-B_s)^2\right] + 4B_s^3 E(B_t-B_s) + B_s^4 .$$

On rappelle que

$$B_t - B_s \sim N(0, \sqrt{t-s})$$

$$\Rightarrow B_t - B_s = \sqrt{t-s}\, X \quad \text{où } X \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow E(B_t^4 \mid \mathcal{F}_s) = (t-s)^2 E(X^4) + 4B_s \sqrt{t-s}^3 E(X^3) + 6B_s^2(t-s)E(X^2) + 4B_s^3\sqrt{t-s}\,E(X) + B_s^4 .$$

Puisque tous les moments d'ordre impaire de la loi normale sont tous 0 et le moment d'ordre 2 est 1

$$E(B_t^4 \mid \mathcal{F}_s) = (t-s)^2 E(X^4) + 6B_s^2(t-s) + B_s^4$$

on utilisé les fcts génératrices des moments :

$$\varphi_X(u) = E\left[e^{uX}\right] = e^{u^2/2}$$

$$\varphi_X^{(4)}(u) = (3 + 6u^2 + u^4)\varphi_X(u) \quad \text{et on a } \varphi_X(0) = 1 .$$

$$\varphi_X^{(4)}(0) = E(X^4) = 3$$

$$\Rightarrow E(B_t^4 \mid \mathcal{F}_s) = (t-s)^2 E(X^4) + 6B_s^2(t-s) + B_s^4$$
$$= 3(t-s)^2 + 6B_s^2(t-s) + B_t^4$$

$\ldots 6t B_t^2 + 3t^2 \mid \mathcal{F}_s)$:

$3(t-s)^2 + 6B_s^2(t-s) + B_s^4 + 6t E(B_t^2 \mid \mathcal{F}_s) + 3t^2$

$= 3(t-s)^2 + 6B_s^2(t-s) + B_s^4 - 6t E(B_t^2 - t + t \mid \mathcal{F}_s) + 3t^2$

$= 3(t-s)^2 + 6B_s^2(t-s) + B_s^4 - 6t(B_s^2 - s + t) + 3t^2$

$= 3t^2 - 6ts + 3s^2 + 6B_s^2 t - 6sB_s^2 + B_s^4 - 6tB_s^2$

$- 6tB_s^2 + 6ts - 6t^2 + 3t^2$

$= B_s^4 - 6sB_s^2 + 3s^2$

$\Rightarrow B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

Exercice 3 : $X_t = \int_0^t e^{s-t}\, dB_s$.

(1) $X_t \sim N\left(0, \int_0^t (e^{s-t})^2 ds\right) = N\left(0, \int_0^t e^{2(s-t)} ds\right)$

$= N\left(0, \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\right)$

(2) Si $Y \sim N(0, \sigma)$ alors $cY \sim N(0, c^2\sigma^2)$

donc $Z_t \sim N\left(0, \sqrt{2(t+1)}^2 \, 1/2 \left(1 - e^{-2\log(t+1)/2}\right)\right)$

$= N\left(0, (t+1)(1 - e^{-\log(t+1)})\right) = N\left(0, (t+1)\frac{t}{t+1}\right)$

$= N\left(0, (t+1)\left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\right)$

$= N(0, t)$.

8 B_t M.B

$\ldots(\omega) = Z + \int_0^t \varphi_s(\omega)\,dB_s$.

$Z = ?$ $\varphi_s(\omega) = ?$

① $F_t(\omega) = B_t^3(\omega)$

Formule d'Itô

$d(B_t^3) = 3B_t^2\,dB_t + \frac{1}{2}6\,B_t\,dt$

$\Rightarrow d(tB_t) = t\,dB_t + B_t\,dt$

on a : $tB_t = \int_0^t s\,dB_s + \int_0^t B_s\,ds$

$tB_t = \int_0^t t\,dB_s$

$\Rightarrow \int_0^t B_s\,ds = \int_0^t (t-s)\,dB_s$.

$B_t^3 = 3\int_0^t B_s^2\,dB_s + 3\int_0^t B_s\,ds = 3\int_0^t B_s^2\,dB_s + 3\int_0^t (t-s)\,dB_s$

$= 3\int_0^t \left(B_s^2 + (t-s)\right)dB_s$

$\Rightarrow Z = 0$ et $\varphi_s(\omega) = 3\left(B_s^2(\omega) + (t-s)\right)$

$(tB_t^3) = t(3B_t^2 dB_t + 3B_t dt) + B_t^3 dt$

Par conséquent

$$tB_t^3 = -Z + \int_0^t s3B_s^2\, dB_s + \int_0^t 3sB_s ds + \int_0^T B_s^3 ds$$

pour $Z \in \mathbb{R}$.

Réécrivant l'expression, on obtient

$$\int_0^t B_s^3 ds = Z + tB_t^3 - \int_0^T s3B_s^2 dB_s - \int_0^t 3sB_s ds$$

ceci donne.

$$\int_0^t B_s^3 ds = Z + \int_0^t \left(3t\left(B_s^2 + (t-s)\right) - s3B_s^2\right) dB_s$$
$$- \int_0^t 3sB_s ds.$$

On écrit $\int_0^t 3sB_s ds$ en une forme par rapport à dB_t au lieu de ds.

$$d(t^2 B_t) = 2t B_t dt + t^2 dB_t.$$

$$t^2 B_t = \int_0^t 2s B_s ds + \int_0^t s^2 dB_s$$

et en remplaçant $t^2 B_t = \int_0^t t^2 dB_s$ on obtient

$\ldots_s\, ds = \frac{1}{2}\int_0^t (t^2 - s^2)\, dB_s.$

et par conséquent

$$\int_0^t B_s^3\, ds = Z + \int_0^t \left(3t\left(B_s^2 + (t-s)\right) - s\,3B_s^2\right) dB_s$$
$$- 3/2 \int_0^t (t^2 - s^2)\, dB_s.$$

On peut écrire maintenant $\int_0^t B_s^3\, ds$ comme

$$\int_0^t B_s^3\, ds = Z + \int_0^t \left(3t\left(B_s^2 + (t-s)\right) - s\,3B_s^2 - \tfrac{3}{2}(t^2 - s^2)\right) dB_s$$

où $Z = E\left[\int_0^t B_s^3\, ds\right] = 0$

$$\varphi_s(\omega) = 3t\left(B_s^2(\omega) + (t-s)\right) - s\,3B_s^2(\omega) - \tfrac{3}{2}(t^2 - s^2)$$

Exercice 8 $\quad dX_t = (\alpha X_t + \beta)\,dt + (\sigma X_t + \gamma)\,dB_t.$

$X_0 = 0.$

① $S_t = e^{(\alpha - \sigma^2/2)t + \sigma B_t}.$

$$f(t,x) = e^{-(\alpha-\sigma^2/2)t-\sigma x}.$$

Alors l'EDS de S_t^{-1} est :

$$dS_t^{-1} = \frac{\partial}{\partial t} f(t,B_t)dt + \frac{\partial}{\partial x} f(t,B_t)\,dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,B_t)\,dt$$

$$= -(\alpha-\sigma^2/2)\,e^{-(\alpha-\sigma^2/2)t-\sigma B_t}\,dt$$

$$-\sigma e^{-(\alpha-\sigma^2/2)t-\sigma B_t}\,dB_t + 1/2\,\sigma^2 e^{-(\alpha-\sigma^2/2)t-\sigma B_t}\,dt$$

$$= -(\alpha-\sigma^2/2)\,S_t^{-1}dt - \sigma S_t^{-1}dB_t$$

② $$d(X_t S_t^{-1}) = X_t\,dS_t^{-1} + S_t^{-1}dX_t + \langle X, S^{-1}\rangle_t$$

$$= X_t\left(-(\alpha-\sigma^2)S_t^{-1}dt - \sigma S_t^{-1}dB_t\right)$$

$$+ S_t^{-1}\left((\alpha X_t+\beta)dt + (\sigma X_t+\gamma)dB_t\right)$$

$$+ (-\sigma S_t^{-1})(\sigma X_t+\gamma)dt$$

$$= -(\alpha-\sigma^2)X_tS_t^{-1}dt - \sigma X_tS_t^{-1}dB_t + \alpha X_tS_t^{-1}dt$$

$$+\beta S_t^{-1}dt + \sigma X_tS_t^{-1}dB_t + \gamma S_t^{-1}dB_t - \sigma^2X_tS_t^{-1}dt - \sigma\gamma S_t^{-1}dt$$

$$\sigma^2) + \alpha - \sigma^2\Big) X_t S_t^{-1} dt + (-\sigma + \sigma) X_t S_t^{-1} dB_t$$
$$+ (\beta - \gamma\sigma) S_t^{-1} dt + \gamma S_t^{-1} dB_t.$$
$$= \Big(-(\alpha - \sigma^2) + \alpha - \sigma^2\Big) X_t S_t^{-1} dt + (-\sigma + \sigma) X_t S_t^{-1} dB_t$$
$$+ (\beta - \gamma\sigma) S_t^{-1} dt + \gamma S_t^{-1} dB_t$$
$$= (\beta - \gamma\sigma) S_t^{-1} dt + \gamma S_t^{-1} dB_t.$$

(3) de (2) on trouve que :

$$X_t S_t^{-1} = (\beta - \gamma\sigma) \int_0^t S_s^{-1} ds + \gamma \int_0^t S_s^{-1} dB_s.$$

multipliant les deux membres par S_t et écrivant S_t sous sa forme explicite, donne

$$X_t = e^{(\alpha - \sigma^2/2)t + \sigma B_t} \Big((\beta - \gamma\sigma) \int_0^t e^{-(\alpha - \sigma^2/2)s - \sigma B_s} ds$$
$$+ \gamma \int_0^t e^{-(\alpha - \sigma^2/2)s - \sigma B_s} dB_s.$$