جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات
2022/02/06

السنة الأولى MI
مقياس جبر1
2022/2021

الامتحان النهائي

التمرين 01: ليكن التطبيق f المعرف كما يلي:

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^2 - 4x + 5$$

I)
1) احسب $f(\{0\})$ ، $f(\{4\})$.
2) احسب $f^{-1}(\{-1\})$ ، $f^{-1}(\{2\})$ ، $f^{-1}(]-\infty, 1[)$.
3) هل f متباين ؟ هل f غامر ؟ علل.

II) نرمز بـ $\mathcal{R}$ العلاقة الثنائية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

1) بين أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}$.
2) عين صنف تكافؤ كل من 0 و 1 (أي $\dot{0}$ ، $\dot{1}$).

التمرين 02: لتكن المجموعة $G =]-\infty, 1[$. نعرف على G العملية $\star$ بالشكل:

$$\forall a, b \in G, \quad a \star b = a + b - ab$$

1) بين أن $\forall a, b \in G, \quad (a \star b) - 1 < 0$ ، ماذا تستنتج؟
2) بين أن $(G,\star)$ زمرة تبديلية.
3) هل المجموعة $H = [0,1[$ زمرة جزئية من G؟

بالتوفيق

جامعة محمد خيضر بسكرة
ك.ع.د.ع.ط.ح
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس: جبر 1
2022/2021

تصحيح الامتحان النهائي

12/12

التمرين 01: ليكن التطبيق f المعرف كما يلي:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2 - 4x + 5$$

I) 1) حساب:

$* \; f(\{0\}) = \{f(x) / x \in \{0\}\}.$

1 $\quad = \{f(x) \mid x = 0\} = \{f(0)\}.$

$\quad = \{0^2 - 4.0 + 5\} = \{5\}.$

$* \; f(\{4\}) = \{f(x) / x \in \{4\}\}.$

1 $\quad = \{f(x) / x = 4\} = \{f(4)\}.$

$\quad = \{4^2 - 4.4 + 5\} = \{5\}.$

2) حساب:

$* \; f^{-1}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{-1\}\}.$

$\quad = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = -1\}.$

$f(x) = -1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = -1.$

1 $\quad \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4.1.6 = 16 - 24 = -8 < 0$

$\Rightarrow f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset.$

$* \; f^{-1}(\{2\}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{2\}\}$

$\quad = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 2\}.$

$f(x) = 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 2$

1 $\quad \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0.$

$\Delta = (-4)^2 - 4.1.3 = 16 - 12 = 4 > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{4+2}{2} = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow f^{-1}(\{2\}) = \{1, 3\}.$

$* \; f^{-1}(]-\infty, 1[) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in]-\infty, 1[\}.$

$f^{-1}(]-\infty, 1[) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) < 1\}.$

$f(x) < 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 < 1.$ 1

$\quad \Rightarrow x^2 - 4x + 5 - 1 < 0$

$\quad \Rightarrow x^2 - 4x + 4 < 0.$

$\quad \Rightarrow (x-2)^2 < 0$

$\Rightarrow f^{-1}(]-\infty, 1[) = \emptyset.$

3) $\exists x_1 = 0 \in \mathbb{R}, \exists x_2 = 4 \in \mathbb{R}:$

1 $\quad f(0) = f(4) = 5$

لكن: $0 \neq 4$.

ومنه: f ليس متباينا.

وجدنا من السؤال (2) أن:

$\exists y = -1 \in \mathbb{R}$ 1

لا يوجد x من $\mathbb{R}$ يحقق: $f(x) = -1$

ومنه: f ليس غامرا.

II) نرمز ب $\mathcal{R}$ العلاقة الثنائية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$\forall x, y \in \mathbb{R}: x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$

1) نبين أن: $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}$:

* $\mathcal{R}$ انعكاسية: ليكن $x \in \mathbb{R}$

لدينا: $f(x) = f(x)$ فإن: $x \mathcal{R} x$ 1

إذن: $\mathcal{R}$ انعكاسية.

* $\mathcal{R}$ تناظرية: ليكن $x, y \in \mathbb{R}$ بحيث

$x \mathcal{R} y \Rightarrow f(x) = f(y)$

1 $\quad \Rightarrow f(y) = f(x)$ (لأنها مساواة)

$\quad \Rightarrow y \mathcal{R} x$

إذن: $\mathcal{R}$ تناظرية.

* $\mathcal{R}$ متعدية: ليكن $x, y, z \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\left.\begin{array}{l} x \mathcal{R} y \\ \wedge \\ y \mathcal{R} z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) = f(y) \\ \wedge \\ f(y) = f(z) \end{array}\right.$$ 1

$\Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$

اذن: $\mathcal{R}$ متعدية.

ومنه: $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}$.

2) تعيين صنف تكافؤ كل من 0 و 1.

* $\dot{0}=\{y\in\mathbb{R}/y\mathcal{R}0\}=\{y\in\mathbb{R}/f(y)=f(0)\}$

$=\{y\in\mathbb{R}/f(y)=5\}$

$=\{y\in\mathbb{R}/y^2-4y+5=5\}$ 1

$=\{y\in\mathbb{R}/y^2-4y=0\}=\{y\in\mathbb{R}/y(y-4)=0\}$

$=\{y\in\mathbb{R}/y=0\vee y=4\}$

$=\{0;4\}$

(أو يمكن استنتاج ذلك من السؤال (1) لان صورة كل من 0 و 4 هو 5).

* $\dot{1}=\{y\in\mathbb{R}/y\mathcal{R}1\}=\{y\in\mathbb{R}/f(y)=f(1)=2\}$

$=\{y\in\mathbb{R}/y^2-4y+5=2\}$

$=\{y\in\mathbb{R}/y^2-4y+3=0\}$ 1

$\Delta=(-4)^2-4.1.3=16-12=4>0$

$\Rightarrow y_1=1 \vee y_2=3$

$\Rightarrow \dot{1}=\{1;3\}$

(أو يمكن استنتاج ذلك من السؤال (2) لان الصورة العكسية لـ $\{2\}$ هي المجموعة $\{1;3\}$).

08/08

التمرين 02: لتكن المجموعة $G=]-\infty,1[$، نعرف على G العملية * بالشكل:

$\forall a,b\in G: a*b=a+b-ab$

1) * نبين أن: ?? $\forall a,b\in G:(a*b)-1<0$??

ليكن $a,b\in G$:

$(a*b)-1=a+b-ab-1$

$=(a-1)(1-b)$ 1

لدينا:

$a\in G\Rightarrow a\in]-\infty,1[\Rightarrow a<1\Rightarrow a-1<0$

$b\in G\Rightarrow b\in]-\infty,1[\Rightarrow b<1\Rightarrow -b>-1$

$\Rightarrow 1-b>0$

اذن: $(a-1)(1-b)<0$

أي: $\forall a,b\in G: (a*b)-1<0$

* الاستنتاج: $\forall a,b\in G:$

$(a*b)-1<0\Rightarrow (a*b)<1$

$\Rightarrow (a*b)\in]-\infty,1[\Rightarrow (a*b)\in G$

0,5 اذن: * عملية داخلية في G.

2) نبين أن: $(G,*)$ زمرة تبديلية:

* * تجميعية: ليكن $a,b,c\in G$:

$(a*b)*c=(a+b-ab)*c$

1 $=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c$

$=a+b-ab+c-ac-bc+abc$

$=a+b+c-ab-ac-bc+abc$ ...(1)

$a*(b*c)=a*(b+c-bc)$

$=a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)$

$=a+b+c-bc-ab-ac+abc$ ...(2)

من (1) و(2) نجد: $(a*b)*c=a*(b*c)$

ومنه: * تجميعية.

* * تبديلية: ليكن $a,b\in G$:

$a*b=a+b-ab$ 1

$b*a=b+a-ba$

بما ان الجمع والضرب تبديليان في G فإن

$a*b=b*a$

اذن: * تبديلية.

* العنصر الحيادي:

?? $\exists e\in G,\forall a\in G: a*e=e*a=a$??

بما أن: * تبديلية. اذن يكفي أخذ معادلة واحدة

$a*e=a$ 1,5

$\Rightarrow \cancel{a}+e-ae=\cancel{a}$

$\Rightarrow e(1-a)=0$

بما أن: $1-a\neq0$ (لأن: $a\in]-\infty,1[$) فإن:

$e=0\in G$

* العنصر النظير:

?? $\forall a\in G,\exists a'\in G: a*a'=a'*a=e$??

بما أن: * تبديلية اذن يكفي أخذ معادلة واحدة

$a*a'=e$

$\Rightarrow a+a'-aa'=0$ 1,5

$\Rightarrow a'(1-a)=-a$

$1-a\neq0\Rightarrow a'=\frac{-a}{1-a}\in G$

(لأن : $a'-1=\frac{-a}{1-a}-1=\frac{-1}{1-a}<0 \Rightarrow a'<1$
$\Rightarrow a'\in G$.)

ومنه : $(G,*)$ زمرة تبديلية .

3) هل المجموعة $H=[0,1[$ زمرة جزئية من G؟

$\exists\, a=0,5\in H$

1,5

لكن العنصر النظير لـ a : $a'=\frac{-a}{1-a}=\frac{-0,5}{1-0,5}=\frac{-0,5}{0,5}=-1\notin H$

إذن : H ليست زمرة جزئية من G .