جامعة محمد خيضر
قسم الرياضيات 2022/2021
2022/01/02

الاسم واللقب:.....

الفوج:.....
السنة الأولى MI
المقياس: جبر 1

فرض رقم 02 تصحيح

07/07

تمرين 01: ليكن التطبيق: $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2}$$

1) احسب $f(\{2\})$, $f(\{-2\})$

2) احسب $f^{-1}(]-\infty,-1[)$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}(\{1\})$

3) هل f متباين ؟ علل.

4) هل f غامر ؟ علل.

تمرين 02: لتكن A, B, C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E، بين أن:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

تمرين 01: 5,25/7 ليكن التطبيق:

$f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2}$

1) حساب:

* $f(\{2\}) = \{f(x) / x \in \{2\}\}$
$= \{f(2)\} = \{\frac{1}{2^2}\} = \{\frac{1}{4}\}$ 0,75

* $f(\{-2\}) = \{f(x) / x \in \{-2\}\}$
$= \{f(-2)\} = \{\frac{1}{(-2)^2}\} = \{\frac{1}{4}\}$ 0,75

2) حساب:

* $f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R}^* / f(x) \in \{1\}\}$
$= \{x \in \mathbb{R}^* / f(x) = 1\}$

$f(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1$ 0,75

$\Rightarrow 1 = x^2$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \vee \\ x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \vee \\ x=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = \{1, -1\}$.

* $f^{-1}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{R}^* / f(x) \in \{-1\}\}$
$= \{x \in \mathbb{R}^* / f(x) = -1\}$.

$f(x) = -1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = -1$ 0,75

$\Rightarrow -x^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 + 1 = 0$.

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$.

$\Rightarrow f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$.

* $f^{-1}(]-\infty,-1[) = \{x \in \mathbb{R}^* / f(x) \in]-\infty,-1[\}$.

$\Rightarrow f^{-1}(]-\infty,-1[) = \{x \in \mathbb{R}^* / f(x) < -1\}$

$f(x) < -1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} < -1$ 0,75

$x^2 > 0 \Rightarrow 1 < -x^2 \Rightarrow x^2 + 1 < 0$.

ونعلم أن: $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 + 1 > 0$

$f^{-1}(]-\infty,-1[) = \emptyset$ ومنه:

$\exists x_1 = 2, \exists x_2 = -2 : f(2) = f(-2) = \frac{1}{4}$ 3) 0,75

لكن $2 \neq -2$

ومنه: f ليست متباينة.

ومن خلال السؤال (2) أن: 4)

$\exists y = -1 \in \mathbb{R}$ 0,75

$\nexists x \in \mathbb{R}^*$ يحقق: $f(x) = -1$

ومنه f ليست غامرة.

تمرين 02: 1,25/7

E مجموعة و A, B, C مجموعات جزئية من E

نبين أن: $A \times (B \cup C) \overset{??}{=} (A \times B) \cup (A \times C)$

ليكن $(x,y) \in (A \times (B \cup C))$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C)$ 1,75

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \vee (x,y) \in (A \times C)$

$\Leftrightarrow (x,y) \in [(A \times B) \cup (A \times C)]$

ومنه: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$