جامعة محمد خيضر

قسم الرياضيات 2021/2020

2021/01/20

الاسم واللقب:...........................

الفوج:.....

السنة الأولى MI

المقياس: جبر 1.

07/07

تصحيح فرض رقم 01

تمرين 01:

1) باستخدام جدول الحقيقة برهن أن: $(P\vee Q)\Leftrightarrow((P\Rightarrow Q)\Rightarrow Q)$

2) لتكن القضايا التالية:

a) $(\sqrt{2}\in\mathbb{Q})\Rightarrow(8=2^3)$ b) $\forall x>0,\ \ln x>0$

c) $\forall x\in\mathbb{N},\exists y\in\mathbb{N},\ y>x^2$ d) $\exists x\in\mathbb{N},\forall y\in\mathbb{N},\ y>x^2$

هل هذه القضايا صحيحة أم خاطئة؟ أعط نفيها.

3) أعط العكس النقيض للقضية المنطقية التالية:

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},\forall p\in\mathbb{N}:\quad (n\geq N)\wedge(p\geq 0)\Rightarrow|u_{n+p}-u_n|<\varepsilon$$

تمرين 02:

برهن بالتراجع أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*\ 3^n\geq 2n+1$

تمرين 01:

1) باستخدام جدول الحقيقة نبرهن أن: $(P\vee Q)\Leftrightarrow((P\Rightarrow Q)\Rightarrow Q)$

P	Q	$\underbrace{P\vee Q}_{①}$	$P\Rightarrow Q$	$\underbrace{(P\Rightarrow Q)\Rightarrow Q}_{②}$	①⇔②
1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1

0,25 0,25 0,5 0,25

1,5

ومنه: $(P\vee Q)\Leftrightarrow((P\Rightarrow Q)\Rightarrow Q)$

2) هل القضايا صحيحة أم خاطئة مع إعطاء نفيها:

a) $(\sqrt{2}\in\mathbb{Q})\Rightarrow(8=2^3)$ خ ص 0,25

اذن: القضية (a) صحيحة 0,25

نفيها: $(\sqrt{2}\in\mathbb{Q})\wedge(8\neq 2^3)$ 0,25

0,75

b) $\forall x>0,\ \ln x>0$

هذه القضية خاطئة 0,25، لأنه يمكننا أخذ مثال مضاد أي $x\in]0,1]$ نجد 0,25 $\ln x\leq 0$

نفيها: $\exists x>0,\ \ln x\leq 0$ 0,25

0,75

c) $\forall x\in\mathbb{N},\exists y\in\mathbb{N},\ y>x^2$

هذه القضية صحيحة 0,25 لأنه من أجل كل $x\in\mathbb{N}$ يوجد: $y=x^2+1$ يحقق 0,25 $y=x^2+1>x^2$

نفيها: $\exists x\in\mathbb{N},\forall y\in\mathbb{N},\ y\leq x^2$ 0,25

0,75

d) $\exists x\in\mathbb{N},\forall y\in\mathbb{N},\ y>x^2$

هذه القضية خاطئة 0,25 لأنه لا يوجد عدد طبيعي مربعه أصغر من أي عدد طبيعي (أو: مثلا نأخذ $y=x^2$) 0,25

أي نفرض أن $x\in\mathbb{N}$ موجود، نجد: $y=x^2$: $x^2=x^2$

نفيها: $\forall x\in\mathbb{N},\exists y\in\mathbb{N}\ \ y\leq x^2$ 0,25

0,75

3) العكس النقيض:

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},\forall p\in\mathbb{N}:\ \overline{|u_{n+p}-u_n|<\varepsilon}\Rightarrow\overline{(n\geq N)\wedge(p\geq 0)}$

1

أي: $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}\ \forall p\in\mathbb{N}:\ |u_{n+p}-u_n|\geq\varepsilon\Rightarrow(n<N)\vee(p<0)$

تمرين 02 : نبرهن بالتراجع : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 3^n \geq 2n+1$

① الفرضية الابتدائية : من أجل $n=1$

$$\left.\begin{array}{l} 3^1 = 3 \\ 2\times1+1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3^1 \geq 2\times1+1$$

اذن : الفرضية الابتدائية محققة.

② نفرض أن : القضية صحيحة من أجل n أي : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 3^n \geq 2n+1$

ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$ أي اثبات أن : $3^{n+1} \geq 2(n+1)+1$??

لدينا :

$$3^n \geq 2n+1$$

$$\Rightarrow 3^n \cdot 3 \geq (2n+1)\cdot 3$$

$$\Rightarrow 3^{(n+1)} \geq 6n+3 \quad \cdots(1)$$

لدينا $6n \geq 2n \Rightarrow 6n+3 \geq 2n+3 \cdots (2)$

من (1) و(2) نجد : $3^{(n+1)} \geq 2n+3$.

ومنه : حسب مبدأ البرهان بالتراجع : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 3^n \geq 2n+1$