فرض في مقياس فيزياء 1 (45 د)

الاسم و اللقب: ..... الفوج: .....

التمرين 1: (6.5 ن)

تعطى إحداثيات النقطة M في اللحظة t في المستوي (OXY) حيث $\{\vec{i},\vec{j}\}$ أساس المعلم، بما يلي:

$$\overrightarrow{OM}: \begin{cases} x = 2t^2 - 2 \\ y = t \end{cases}$$

احسب: 1) مركبات وطويلة شعاعي السرعة والتسارع.

2) المركبات المماسية والناظمية للتسارع.

3) الجداء السلمي $\overrightarrow{OM}.\vec{j}$.

الحل: 1) حساب مركبات شعاع السرعة:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \begin{cases} \dot{x} = 4t \\ \dot{y} = 1 \end{cases}$$ (0,25) (0,75) (0,75)

حساب الطويلة:

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{(4t)^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\|\vec{V}\| = \sqrt{16t^2+1}}$$ (0,75)

حساب مركبات شعاع التسارع:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \begin{cases} \ddot{x} = 4 \\ \ddot{y} = 0 \end{cases}$$ (0,25) (0,5) (0,5)

الطويلة:

$$\boxed{\|\vec{a}\| = 4}$$ (0,25)

2) حساب المركبة المماسية للتسارع:

$$a_T = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}$$ (0,5)

$$a_T = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{16t^2+1}\right)$$

$$a_T = \frac{16(2)\,t}{2\sqrt{16t^2+1}}$$

$$\boxed{a_T = \frac{16t}{\sqrt{16t^2+1}}}$$ (0,5)

حساب المركبة الناظمية للتسارع:

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$$ (0,5)

$$a_N = \sqrt{4^2 - \left(\frac{16t}{\sqrt{16t^2+1}}\right)^2}$$

$$\boxed{a_N = \frac{4}{\sqrt{16t^2+1}}}$$ (0,5)

3) حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j}$

$\vec{j}$ شعاع الوحدة للمحور (oy) $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

حسب العبارة التحليلية للجداء السلمي:

$$\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j} = x(0) + y(1)$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j} = y = t}$$ (0,5)

التمرين 2: (3.5 ن)

تعطى الإحداثيات القطبية لحركة نقطة مادية M بما يلي:

$$\begin{cases} r = e^{-3t} \\ \varphi = 3t \end{cases}$$

1) اكتب شعاع الموضع في جملة الإحداثيات القطبية.

2) احسب شعاعي السرعة والتسارع.

الحل: 1) كتابة شعاع الموضع في جملة الإحداثيات القطبية:

$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$ (0,25)

$\boxed{\overrightarrow{OM} = e^{-3t}\,\overrightarrow{u_r}}$ (0,75)

2) حساب شعاع السرعة:

$\overrightarrow{V} = \dot{\overrightarrow{OM}}$

$\overrightarrow{V} = \frac{d}{dt}\left(e^{-3t}\,\overrightarrow{u_r}\right)$

$\overrightarrow{V} = -3e^{-3t}\,\overrightarrow{u_r} + e^{-3t}\,\dot{\overrightarrow{u_r}}$ (0,25)

$\boxed{\dot{\overrightarrow{u_r}} = \dot{\varphi}\,\overrightarrow{u_\varphi} = 3\,\overrightarrow{u_\varphi}}$

$\varphi = 3t \Rightarrow \dot{\varphi} = 3$

$\overrightarrow{V} = -3e^{-3t}\,\overrightarrow{u_r} + e^{-3t}\left(3\,\overrightarrow{u_\varphi}\right)$

$\boxed{\overrightarrow{V} = 3e^{-3t}\left(-\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_\varphi}\right)}$ (0,5 + 0,5)

حساب شعاع التسارع:

$\overrightarrow{a} = \dot{\overrightarrow{V}} = \frac{d}{dt}\left(3e^{-3t}\left(-\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_\varphi}\right)\right)$

$\overrightarrow{a} = -9e^{-3t}\left(-\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_\varphi}\right) + 3e^{-3t}\left(-\dot{\overrightarrow{u_r}} + \dot{\overrightarrow{u_\varphi}}\right)$

$\boxed{\dot{\overrightarrow{u_\varphi}} = -\dot{\varphi}\,\overrightarrow{u_r} = -3\,\overrightarrow{u_r}}$ (0,25)

$\overrightarrow{a} = -9e^{-3t}\left(-\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_\varphi}\right) + 3e^{-3t}\left(-3\overrightarrow{u_\varphi} - 3\overrightarrow{u_r}\right)$

$\overrightarrow{a} = -9e^{-3t}\left(-\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_\varphi}\right) - 9e^{-3t}\left(\overrightarrow{u_\varphi} + \overrightarrow{u_r}\right)$

$\boxed{\overrightarrow{a} = -18e^{-3t}\,\overrightarrow{u_\varphi}}$ (0,5 + 0,5)

ملاحظة:

2) لحساب شعاعي السرعة والتسارع يمكن استعمال العبارتين الآتيتين:

$\overrightarrow{V} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\varphi}\,\overrightarrow{u_\varphi}$ (0,25)

$\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\overrightarrow{u_\varphi}$ (0,25)