

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider - Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrique

Support de cours

Systemes Asservis

Niveau: 3^{ème} année Licence Electromécanique

Préparé par: Dr. Mechgoug Raihane

Année Universitaire 2021/2022

Table des matières

Chapitre I. Introduction aux systèmes asservis

Chapitre II. Modélisation des Systèmes Linéaires Continus

Chapitre III. Réponse Temporelle des Systèmes Linéaires

Chapitre IV. Réponse fréquentielle des systèmes Linéaires

Chapitre V. Stabilité des Systèmes Linéaires

Chapitre I. Introduction aux systèmes asservis

I.1. Généralités

Il y a asservissement d'une grandeur de sortie « s » à une grandeur de consigne « e » lorsqu'on force par un dispositif particulier la grandeur de sortie « s » à suivre le plus fidèlement l'évolution de la consigne « e ». On dit alors qu'un système asservi est un système en boucle fermée c'est-à-dire possédant une rétroaction (contre réaction) de la grandeur de sortie « s » sur la grandeur de consigne « e ».

L'objectif d'un asservissement est d'imposer à la sortie loi d'évolution choisie. Exemple : asservissement de position.

La régulation permet de maintenir une valeur donnée de la sortie malgré les perturbations agissant sur le système. Exemple : régulation de température.

I.2. Schéma blocs d'un système asservi

a. Système en boucle ouverte

Un système fonctionne en boucle ouverte est équivalent à une cascade de sous-systèmes dont le signal de commande (l'entrée) est indépendant du signal de sortie.

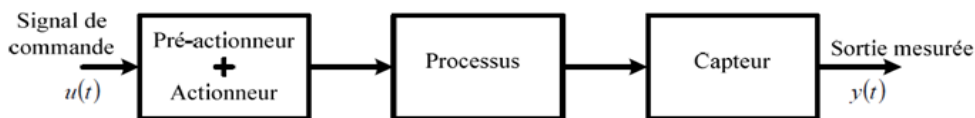


Figure I.1. Schéma blocs d'un système en boucle ouverte

b. Système en boucle fermée

Le système global comporte un processus à contrôler et un système de commande. Pour un système en boucle fermée le signal de commande dépend d'une façon ou d'autre de signal de sortie, donc il existe un bouclage entre la sortie $y(t)$ et la prise de décision (contre réaction).

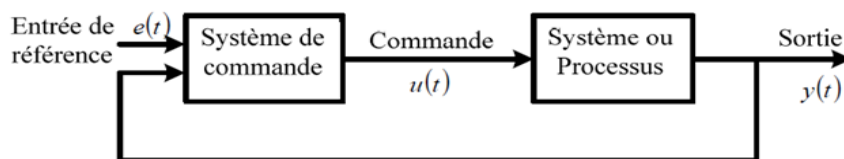


Figure I.2. Schéma blocs d'un système en boucle fermée

c. Structure d'une chaîne d'asservissement

Une commande en boucle fermée est souvent représentée par un schéma synoptique dans lequel on fait apparaître les principaux organes du système.

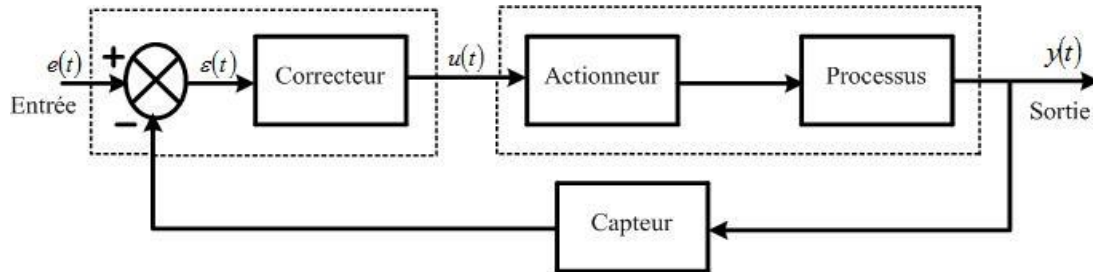


Figure I. 3 : Structure d'une chaîne d'asservissement

Les principaux éléments d'une chaîne d'asservissement sont :

- ✚ **Le régulateur** : Il est composé d'un comparateur qui élabore en permanence le signal d'erreur $\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$ et d'un correcteur qui élabore à partir du signal d'erreur $\varepsilon(t)$ la grandeur de commande $u(t)$. Le régulateur constitue l'organe intelligent du système asservi.
- ✚ **L'actionneur** : est un dispositif physique généralement amplificateur de puissance. Il réalise la commande du processus.
- ✚ **Le capteur** : (la chaîne de retour) est un dispositif physique qui permet de convertir la grandeur physique $s(t)$ en un signal exploitable généralement. Il est impératif que le capteur soit fiable, précis et insensible à l'environnement (pas de perturbation).

Grandeurs d'informations

- ✚ **Entrée consigne** : la consigne est l'entrée de référence, c'est la grandeur réglant du système.
- ✚ **Sortie régulé (asservie)** : la sortie régulée représente le phénomène que doit réguler le système. C'est la grandeur physique pour lequel le système est conçu.
- ✚ **Perturbations** : on appelle perturbations tout phénomène physique intervenant sur le système qui modifie l'état de la sortie. Un système régulé doit pouvoir maintenir la sortie à son niveau indépendamment de la perturbation.
- ✚ **Ecart (erreur)** : c'est la différence entre la consigne et la sortie. Cette mesure (erreur) ne peut être réalisée que sur des grandeurs comparables (de même nature).

I.3. Problème de la commande des systèmes

On peut classer les systèmes asservis en deux grandes familles :

- ✚ **Les asservissements** : c'est-à-dire la poursuite par la sortie d'une consigne variable continûment au cours de temps (table traçante, bouc le à verrouillage de phase...).
- ✚ **Les régulations** : c'est-à-dire la compensation ou rejet de l'effet de perturbations variables sur la sortie sachant que la consigne est considérée comme constante (alimentation stabilisée, régulation de vitesse, de température ...).

I.4. Les objectifs de l'asservissement

Un système automatique est un système capable d'effectuer plusieurs opérations sans interventions de l'homme. La théorie de l'automatique permet de concevoir et d'analyser des asservissements en tenant compte de multiples objectifs:

- ✚ Maintenir ou obtenir la stabilité.
- ✚ La précision
- ✚ Faire poursuivre rapidement une consigne.
- ✚ Obtenir des réponses rapides.
- ✚ Concevoir des systèmes de commande relativement simple à mettre en œuvre.

Chapitre II. Modélisation des Systèmes Linéaires Continus

II.1. Présentation Système linéaire

Un système linéaire est représenté sous la forme de schémas-blocs, les entrées (**Causes**) étant situées généralement à gauche et les sorties (**Effets**) à droite. L'intérieur du bloc contient une description du système étudié (**Fonction de transfert**).

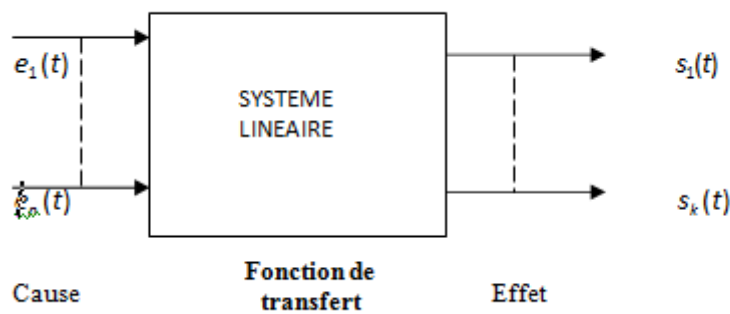


Figure II.1. Présentation de système linéaire

II.1.2. Systèmes linéaires

Un système est dit **linéaire** si la fonction qui le décrit est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors le principe de proportionnalité et de superposition:

- *Proportionnalité* : Si $s(t)$ est la réponse à l'entrée $e(t)$ alors $\lambda s(t)$ est la réponse à $\lambda e(t)$.



- *Superposition* :



II.1.2. Système continu

Un système est continu, par opposition à un système discret, lorsque les variations des grandeurs

physiques le caractérisant sont des fonctions à temps continu et que l'on peut donc définir ces grandeurs à tout instant. On parle aussi dans ce cas de système analogique.

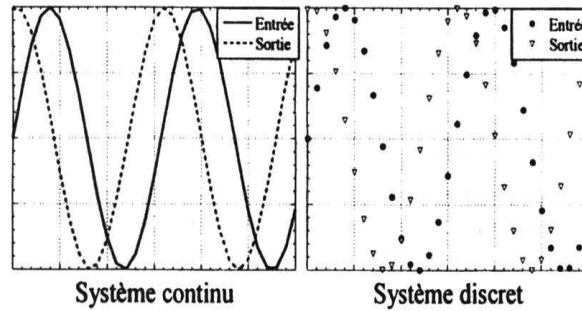


Figure II.2. Système Continu et discret

La plupart des systèmes physiques, du point de vue macroscopique, sont continus. Un système informatique par contre a besoin d'un temps non nul pour réaliser un traitement de l'information. On ne peut donc pas le qualifier de système continu, il ne peut que traiter des échantillons des signaux continus qui lui sont soumis, on parle dans ce cas de système échantillonné.

II.1.3. Système invariant

Un système est dit invariant si on suppose que les caractéristiques du système (masse, dimensions, résistance, impédance, ...) ne varient pas au cours du temps ("le système ne vieillit pas").

Si $s(t)$ est la réponse à l'entrée $e(t)$ alors $s(t-\tau)$ est la réponse à $e(t-\tau)$.

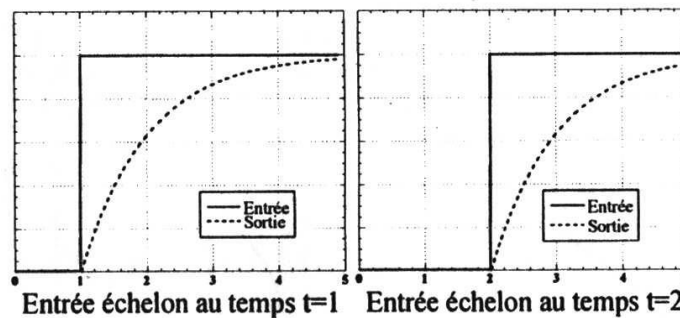


Figure II. 3. Système Invariant

II.2. Représentation des SLCI

En réalité, les systèmes qu'on étudiera ne sont ni continus (point de vue microscopique), ni invariants (vieillessement), ni linéaires. En faisant des hypothèses simplificatrices, on se ramène à ce cas, c'est-à-dire à des systèmes dont le comportement peut être représenté par des équations différentielles à coefficients constants:

Equation fondamentale:

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 e(t)$$

Deux modèles de systèmes fondamentaux sont :

- les systèmes du premier ordre: $\tau ds(t)/dt + s(t) = ke(t)$
- les systèmes du deuxième ordre: $\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2mw_0 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = kw_0^2 e(t)$
- gain: $s(t) = b_0 e(t)$
- dérivateur : $s(t) = b_1 de(t)/dt$
- intégrateur $a_1 ds(t)/dt = e(t)$

II.3. Signaux utilisé à l'entrée du système

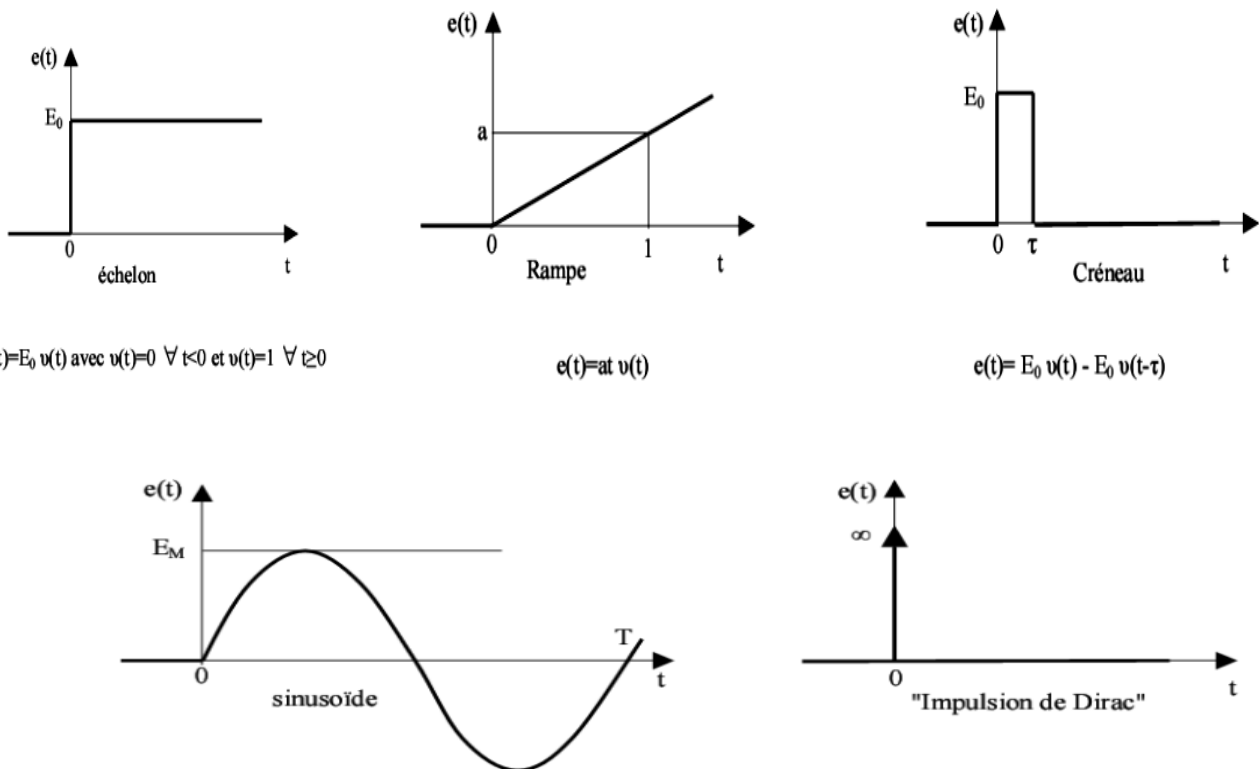


Figure II. 4. Signaux d'entrées

II.4. Transformation de Laplace


II.4.1. Transformée de Laplace : A quoi ça sert ?


Il s'agit d'une méthode de résolution pour résoudre les systèmes d'équa diff. La transformation mathématique va remplacer la résolution de l'équation différentielle par l'étude d'une fraction polynomiale

Définition: la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ est notée $F(p) = L[f(t)]$.

$$f(t) \rightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Avec :

 p est une variable complexe. $p=a+jb$

 $f(t)$ est intégrable

II.4.2. Propriétés de la transformée de Laplace

- **Unicité** : $f(t)$ correspond $F(p)$ unique
 $F(p)$ correspond $f(t)$ unique
- **Linéarité** : $L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)] = F_1(p) + F_2(p)$
 - : $L[\lambda f(t)] = \lambda F(p)$

- **Transformée de la dérivée** : Pour cela, intégrons par partie :

$$\begin{aligned} L[f'(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = [e^{-pt} f(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (e^{-pt})' f(t) dt \\ &= pL[f(t)] - f(0^+) \end{aligned}$$

Car la fonction $f(t)$ est intégrable. Ainsi, nous avons de même , avec la même démarche

$$\begin{aligned} L[f'(t)] &== pL[f(t)] - f(0^+) \\ L[f''(t)] &== p^2L[f(t)] - pf(0^+) - f'(0^+) \end{aligned}$$

Une dérivation dans le domaine temporel revient a une multiplication par p dans le domaine symbolique de Laplace

- **Transformée de l'intégrale**

$$L\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{f(0^+)}{p}$$

- **Le retard**

$$L[f(t - \tau)] = \int_0^\infty e^{-pt} f(t - \tau) dt = e^{-\tau p} F(p)$$

II.4.3. Théorème de la valeur initiale et finale

Ce théorème permet de déterminer la valeur initiale du système.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

II.4.5. Transformées de fonctions courantes

1. Echelon unité

$$u(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } u(t) = 1 \text{ si } t \geq 0$$

$$L\{u(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot u(t) dt = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} \cdot e^{-pt}\right]_0^\infty = \frac{1}{p}$$

2. Fonction de Dirac (ou impulsion unité) $\delta(t)$

Par définition $\delta(t) = 0 \forall t \neq 0$

Cette fonction représente une action s'exerçant pendant un temps très court $L\{\delta(t)\} =$

$$\int_0^\infty e^{-pt} \cdot \delta(t) dt = 1$$

3. Fonction rampe de pente unitaire

$$r(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } r(t) = t \text{ si } t \geq 0 \text{ donc } r(t) = t \cdot u(t)$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = u(t) \Rightarrow L\{r(t)\} = L\{t \cdot u(t)\} = \frac{U(p)}{p} + \frac{r(0)}{p} = \frac{1}{p^2}$$

4. Fonction sinusoïdale: $f(t) = \sin \omega t \cdot u(t)$

5. $L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot \sin \omega t \cdot u(t) dt$ qu'on intègre par parties en posant $du = \sin \omega t \cdot d(t)$ et $v = e^{-pt}$

$$\left[\frac{\cos \omega t}{\omega} e^{-pt} \right]_0^{\infty} - \frac{p}{\omega} \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot \cos \omega t \cdot dt = \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega} \left\{ \sin \omega t \cdot e^{-pt} \right\}_0^{\infty} = \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega}$$

1. $L\{\sin \omega t \cdot u(t)\} = \frac{\omega}{\omega^2 + p^2}$

$f(t)u(t)$	$F(p)$	$f(t)u(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
K	$\frac{K}{p}$	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
Kt	$\frac{K}{p^2}$	$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(1 + \tau p)}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$		

Tableau II.1. Transformé de Laplace des fonctions usuelles

Chapitre III : Réponse Temporelle des Systèmes Linéaires

III. 1. Systèmes de premier ordre

III.1. 1. Définition

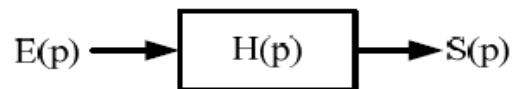
On appelle système de premier ordre d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ tout système régi par une équation différentielle de type :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = ke(t)$$

Avec :

k : gain statique,

τ : Constante de temps (en s).



En appliquant la transformée de Laplace à cette équation à condition initiale nulle. On peut alors définir la fonction de transfert (ou transmittance) du système de premier ordre par la forme

canonique de suivante :

$$H(p) = \frac{k}{1 + \tau p}$$

Exemples1 : Circuit RC

Charge d'une capacité C au travers d'une résistance.

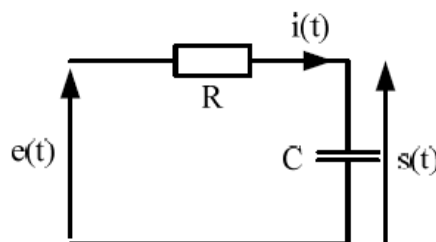


Figure III.1. Circuit RC

$$RC \cdot \frac{dS(t)}{dt} + s(t) = e(t) \xrightarrow{L} H(p) = \frac{1}{1 + \tau_e p}$$

Avec $\tau_e = RC$ et condition initiale nulle $S(0) = 0$

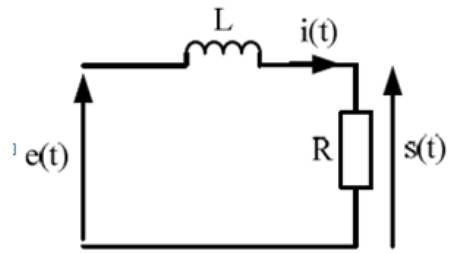
Exemple 2 : Circuit L R

Figure III.2. Circuit LR

A condition initiale nulle ($S(0) = 0$) la fonction de transfert est défini par :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau_e p}$$

$$\text{Avec } \tau_e = \frac{L}{R}$$

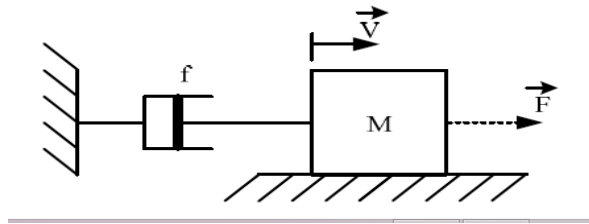
Exemple 3 : Système mécanique

Figure III.3. Système mécanique

Avec :

f : coefficient de frottement,

M : masse du corps en mouvement,

F : force extérieure appliquée.

L'application de la relation fondamentale de la dynamique(RFD) pour ce système donne :

$$F = M \frac{dv}{dt} + fv$$

La transformée de Laplace, à conditions initiales nulles, donne

$$F(p) = (Mp + f)v(p)$$

La fonction de transfert de ce système est :

$$\frac{V(p)}{F(p)} = \frac{1}{Mp + f} = \frac{1/f}{1 + \frac{M}{f} \cdot p}, \text{ avec } \tau_e = \frac{M}{f} \text{ constante mécanique}$$

III.1.2. Etude temporelle de système premier ordre

1. Réponse indicielle

On considère une entrée $e(t) = E_0 \cdot u(t)$ où $u(t)=1$ ($t > 0$) est un échelon unitaire décrit par la figure suivante :

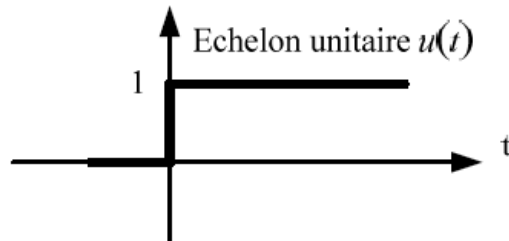


Figure III.4. Échelon Unitaire

$$E = \frac{E_0}{P}$$

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{KE_0}{p(1 + \tau p)}$$

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = KE_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) u(t)$$

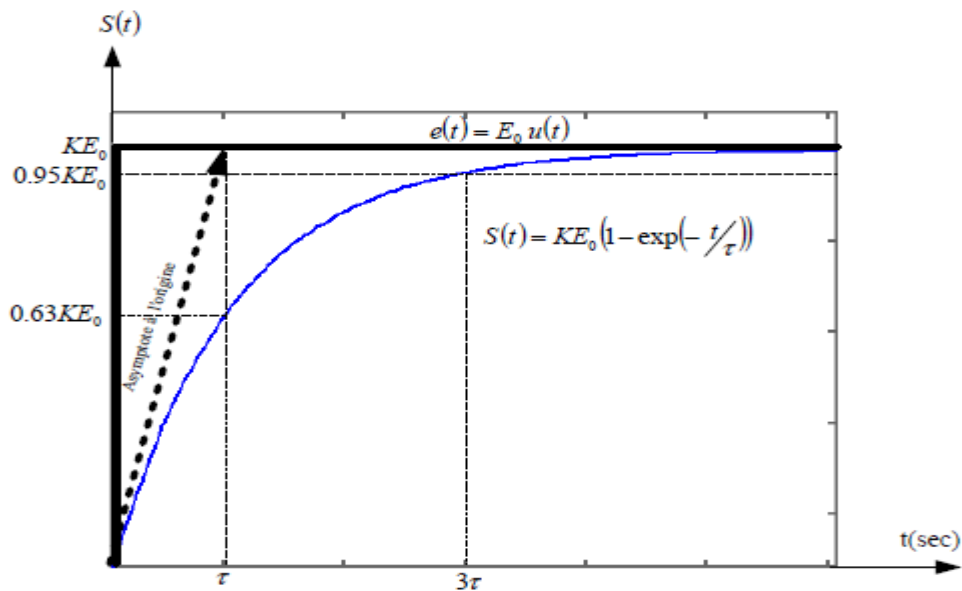


Figure III.5. Réponse indicielle

✚ Constante de temps : $s(\tau) = KE_0(1 - e^{-1}) = 0.63KE_0$

C'est le temps au bout duquel la réponse atteint 63% de la valeur finale. La constante de temps du système caractérise la rapidité du régime transitoire.

✚ Temps de stabilisation à 5% (ou de réponse) : $s(3\tau) = KE_0(1 - e^{-3}) = 0.95KE_0$

Le temps de réponse est défini comme étant le temps au bout duquel la réponse du système ne s'écarte pas de plus de 5% de son état permanent.

2. Réponse à une impulsion $e(t) = E_0\delta(t)$

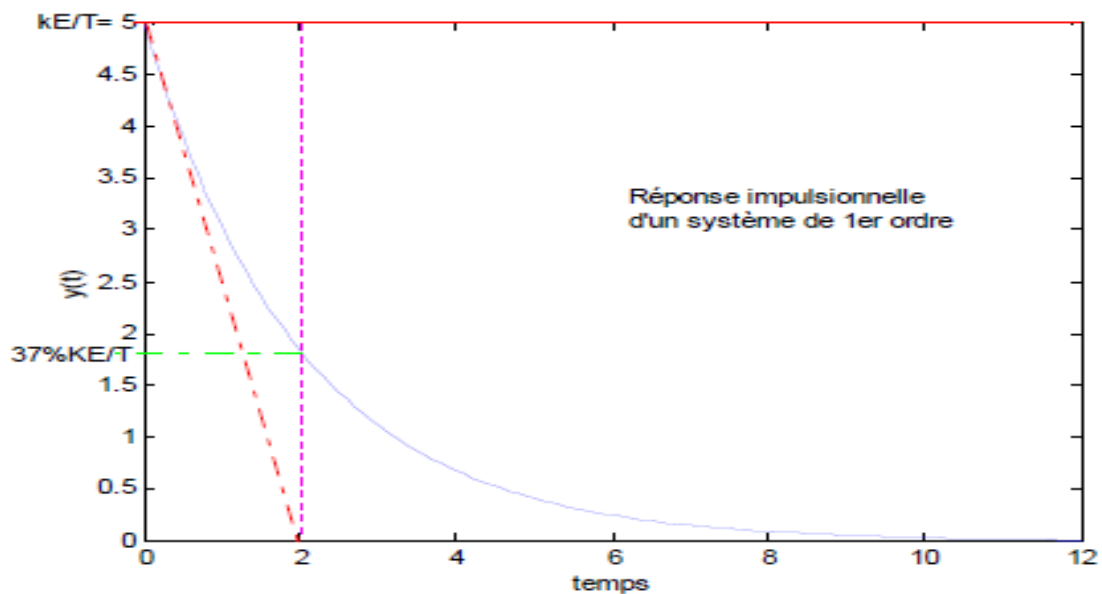
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p} \quad \text{avec } E(p) = E_0$$

$$S(p) = \frac{k}{1 + \tau p} = \frac{k \cdot E_0}{\tau} \left[\frac{1}{\frac{1}{\tau} + p} \right]$$

$$s(t) = \frac{k \cdot E_0}{\tau} \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right]$$

$$\text{Si } t \rightarrow 0 \quad y(t) \rightarrow \frac{k \cdot E_0}{\tau}$$

$$\text{Si } t \rightarrow \infty \quad y(t) \rightarrow 0$$



Réponse impulsionnelle d'un système de 1^{er} ordre (KE=10).

Figure III.6. Réponse Impulsionnelle

3. Réponse à une rampe

$$e(t) = E_0 \cdot t \cdot u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p^2}$$

$$H(p) = \frac{kE_0}{p^2(1 + \tau p)}$$

Décompositions en éléments simples $S(p)$

$$S(p) = \frac{kE_0}{p^2(1 + \tau p)} = \frac{A1}{p} + \frac{A2}{p^2} + \frac{A3}{(1 + \tau p)}$$

$$A2 = [p^2 \cdot S(p)]_{p=0} = kE_0$$

$$A3 = [(1 + \tau p) \cdot S(p)]_{p=-1/\tau} = kE_0 \tau^2$$

Par identification terme a terme on aura $A1 = -kE_0 \tau$

$$S(p) = \frac{-kE_0 \tau}{p} + \frac{kE_0}{p^2} + \frac{kE_0 \tau^2}{p + \tau} \Rightarrow s(t) = kE_0 \left[-\tau + t + \tau^2 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u(t)$$

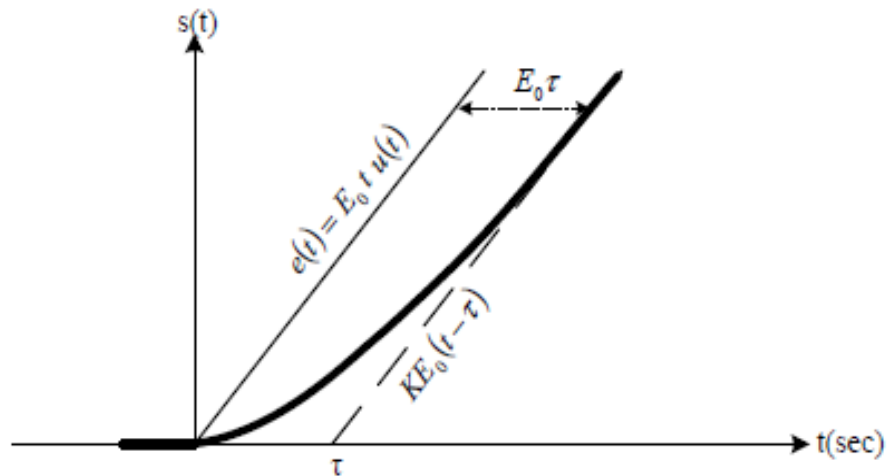


Figure III.7. Réponse a rampe

II. 3. Système de premier ordre généralisé

III.3.1. Définition : On appelle systèmes de premier ordre généralisé, les systèmes dont l'équation différentielle est de la forme suivante :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = ke(t) + \tau' \frac{ds(t)}{dt}$$

Hypothèse : conditions initiales nulles

La fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = k \frac{1 + \tau' p}{1 + \tau p}$$

Soit $\lambda = \frac{\tau'}{\tau}$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = k \frac{1 + \lambda \tau p}{1 + \tau p}$$

2. Exemples

a. Système électrique à avance de phase

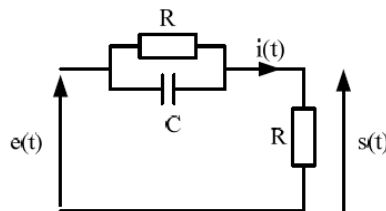


Figure III.7. Système à avance de phase

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$$H(p) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{Cp}}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + R_1 C p}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C p}$$

Soient $\tau' = R_1 C$, $\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ et $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Finalement on obtient la forme d'un système de premier ordre généralisé $H(p) = k \frac{1 + \lambda \tau p}{1 + \tau p}$

$$\lambda = \frac{\tau'}{\tau} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1 \Rightarrow \text{Système à avance de phase.}$$

b . Système électrique à retard de phase

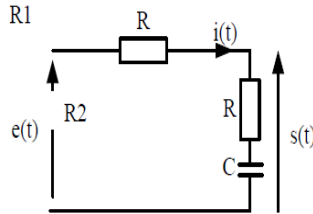


Figure III.8. Système a retard de phase

$$\text{Calculons } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1 + R_2 C p}{1 + (R_1 + R_2) C p} = \frac{1 + \tau' p}{1 + \tau p}$$

$$\text{Avec : } \tau' = R_2 C, \quad \tau = (R_1 + R_2) C \text{ et } k = 1$$

$$\lambda = \frac{\tau'}{\tau} = \frac{R_2}{R_2 + R_1} < 1 \Rightarrow \text{Système à retard de phase.}$$

➤ Réponse indicielle : On considère une entrée $e(t) = E_0 u(t)$

$$S(p) = H(p) \times E(p) = k \frac{1 + \lambda \tau p}{1 + \tau p} \cdot \frac{E_0}{p}$$

$$\Rightarrow s(t) = k E_0 \left(1 + (\lambda - 1) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) u(t)$$

Cette réponse est représentée schématiquement, selon la valeur de λ , sur la figure suivante :

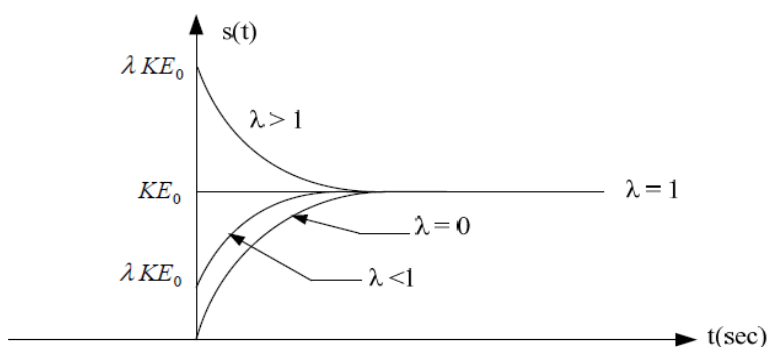


Figure III.9. Réponses indicielle d'un système de premier ordre généralisé

$$s(0) = \lambda k E_0$$

$$s(\infty) = k E_0$$

Remarque : Pour $\lambda=0$ on retrouve le cas du système de premier ordre. On note aussi que pour $\lambda>1$, le système commence par dépasser sa valeur finale, de sorte que sa sortie atteint des valeurs notables bien plus vite que celle du système de premier ordre.

III.4. Systèmes de second ordre

III.4.1. Définition

On appelle système de second ordre d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ tout système régi par une équation différentielle de type :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = k\omega_0 e(t)$$

Avec :

K est le **gain statique** du système (gain en régime permanent).

ω_0 : est appelé pulsation libre ou pulsation naturelle ou **pulsation propre** du système **non amorti** (se mesure en rad/s).

m : est appelé **amortissement** du système ou facteur d'amortissement ou coefficient d'amortissement.

En appliquant la transformée de Laplace à conditions initiales nulles ($s(0)=0; s'(0)=0$)

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

Exemple (Circuit RLC)

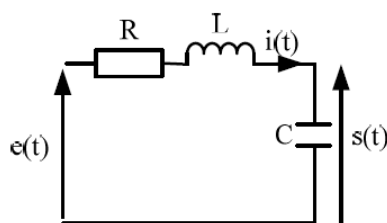


Figure III.7. Circuit RLC

On appliquant la loi de maille on détermine l'équation différentielle du circuit

$$\begin{cases} e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + s(t) \\ i(t) = C \frac{ds(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow e(t) = LC \frac{d^2s(t)}{dt^2} + RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace (T.L) à condition initiales nulles à l'équation différentielle précédente on obtient :

$$E(p) = (LC p^2 + RC p + 1)S(p) \quad \text{La fonction de transfert du circuit est défini par:}$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{LC p^2 + RC p + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}}$$

Soit

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \\ m = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$$

III.4. 3. Etude temporelle du système de second ordre

L'équation caractéristique du système second ordre est défini par : $\Delta' = \omega_0^2(m^2 - 1)$

a. Système du second ordre hyper-amorti ($m > 1$)


$$\Delta' = \omega_0^2(m^2 - 1) > 0$$

L'équation caractéristique à deux pôles réels :

$$\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1} = -\frac{1}{\tau_1} \end{cases}$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = \frac{\frac{k}{\tau_1 \tau_2}}{p^2 + \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} p + \frac{1}{\tau_1 \tau_2}} = \frac{k \omega_0^2}{p^2 + 2m \omega_0 p + \omega_0^2}$$

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \\ m = \frac{1}{2} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \end{cases}$$

 **Réponse indicielle** : L'entrée appliquée est un échelon de position $e(t) = E_0 u(t)$

$$\Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$$

$$\Rightarrow S(p) = H(p)E(p) = \frac{kE_0}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ donne :

$$s(t) = kE_0 \left[1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left(\tau_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) - \tau_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right) \right] u(t)$$

b. Système du second ordre critique ($m=1$)

$$\text{On a : } m=1 \Rightarrow \Delta = 0$$

$$p_1 = p_2 = -\omega_0 = -\frac{1}{\tau}$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K\omega_0^2}{(p + \omega_0)^2}$$

✚ Réponse indicielle

$$e(t) = E_0 u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$$

$$\Rightarrow S(p) = H(p)E(p) = \frac{K\omega_0^2 E_0}{p(p + \omega_0)^2} = \frac{K E_0}{p(1 + \tau p)^2}$$

$$s(t) = L^{-1} \left[\frac{kE_0}{p(1 + \tau p)^2} \right] = kE_0 \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u(t)$$

c. Système du second ordre oscillant amorti ($0 < m < 1$)

$$m < 1 \Rightarrow \Delta' < 0$$

$$\Delta' = -\omega_0^2(1 - m^2) = j^2 \omega_0^2(1 - m^2) \quad (j^2 = -1)$$

Donc l'équation caractéristique à deux pôles complexes conjugués

$$\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2} \\ p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2} \end{cases}$$

✚ **Réponse indicielle** : Cette réponse est obtenue pour ($e(t) = E_0 u(t)$), La sortie $s(t)$ du système est :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{kE_0 \omega_0^2}{p(p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2)}$$

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}[S(p)]$$

$$\Rightarrow s(t) = kE_0 \left[1 - \frac{\exp(-m\omega_0 t)}{\sqrt{1-m^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t + \psi) \right] u(t)$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$$

$$\psi = \arccos(m)$$

Pour le système du second ordre oscillant amorti, on définit:

Pseudo pulsation du système $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-m^2}$

Temps de premier dépassement: $t_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$

Dépassement: $D = \frac{s(t_p) - s(\infty)}{s(\infty)} = \exp\left(-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}\right)$

$$\text{En (\%)} : D(\%) = \frac{s(t_p) - s(\infty)}{s(\infty)} \times 100 = 100 \exp\left(-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}\right)$$

d. Système de second ordre oscillant pur ($m = 0$)

$$m = 1 \Rightarrow \Delta = -\omega_0^2$$

$$\text{poles } p_{1,2} = \pm j\omega_0$$

$$H(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + \omega_0^2}$$

✚ Réponse indicielle

$$S(p) = \frac{k\omega_0^2 E_0}{p(p^2 + \omega_0^2)}$$

$$s(t) = kE_0 (1 - \cos \omega_0 t) u(t)$$

Chapitre IV. Réponse fréquentielle des systèmes Linaires

IV.1. Etude harmonique (fréquentielle) du système premier ordre

La fonction de transfert du système premier ordre pour ($p = j\omega$) est :

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$$

Posons $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ et $u = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$H(ju) = \frac{K}{1 + ju}$$

Module de $H(ju)$

$$|H(ju)| = \frac{K}{\sqrt{1+u^2}}$$

Argument de $H(ju)$

$$\phi = \arg[H(ju)] = -\arctg(u)$$

1. Diagramme de Bode

Diagramme asymptotique $|H(ju)| = H$

Posons $u = \omega$

Etude du module et de l'argument

$$\text{Pour } \omega = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Rightarrow \begin{cases} |H| = k \text{ ou } |H|_{dB} = 20 \log_{10}(k) \\ \phi = 0^\circ \end{cases}$$

$$\text{Pour } \omega = \omega_0 \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| = \frac{k}{\sqrt{2}} \text{ ou } |H|_{dB} = 20 \log_{10}(k) - 3 \\ \phi = 45^\circ \end{cases}$$

$$\text{Pour } \omega \ll \omega_0 \Leftrightarrow u \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| = k \text{ ou } |H|_{dB} = 20 \log_{10}(k) \\ \phi = 0^\circ \end{cases}$$

$$\text{Pour } \omega \gg \omega_0 \Leftrightarrow u \gg 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| = \frac{k}{u} \text{ ou } |H|_{dB} = 20 \log_{10}(k) - 20 \log_{10}(u) \\ \phi = 90^\circ \end{cases}$$

Une asymptote oblique d'équation ($H_{dB} = 20\log_{10}(k) - 20\log_{10}(u)$) de pente $(-20)dB /$ *décade* pour $(\omega) \gg \omega_0$)

Le point d'intersection entre les deux asymptotes est le point où $\omega = \omega_0$

La représentation asymptotique de Bode en phase est donc composée de deux asymptotes :

Une asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour $\omega = \omega_0$, et $\varphi = 90^\circ$

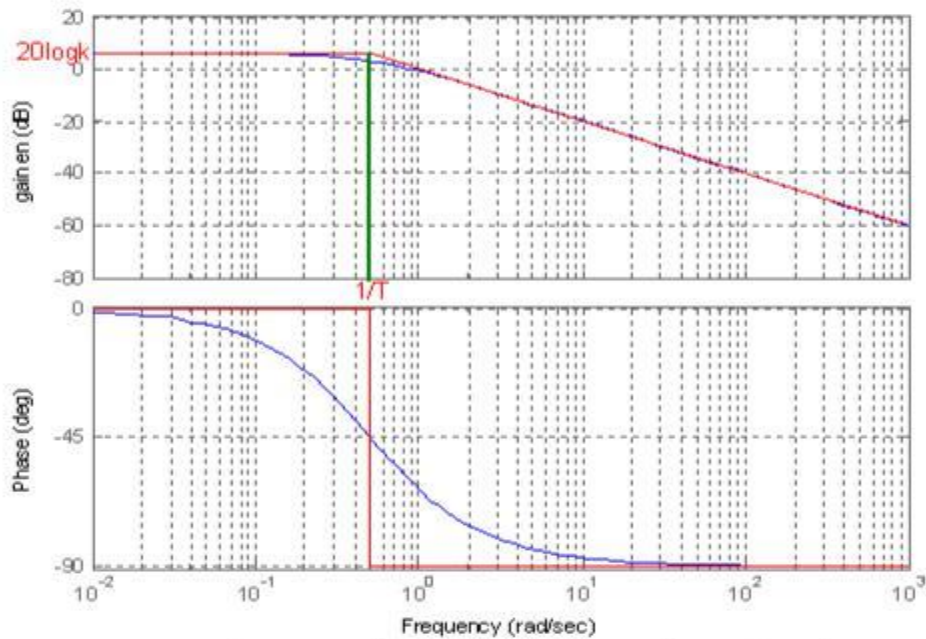


Diagramme de Bode d'un système de premier ordre

Le système possède une fréquence de coupure pour $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$

2. Diagramme de Nyquist

Il représente dans le plan complexe la partie imaginaire en fonction de la partie réelle et qui évolue en fonction de ω .

On représente $\text{Im } g[H(j\omega)] = f(\text{réel}[H(j\omega)])$

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + ju} = \frac{K(1 - ju)}{(1 + ju)(1 - ju)} = \frac{K}{1 + u^2} - j \frac{Ku}{1 + u^2}$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} X = \frac{K}{1 + u^2} & (1) \\ Y = -\frac{Ku}{1 + u^2} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow u^2 = \frac{K}{X} - 1 & (1') \\ (2) \Rightarrow Y = -uX & (2') \end{cases}$$

$$(2')^2 \Rightarrow Y^2 = u^2 X^2 = \left(\frac{K}{X} - 1\right) X^2 = KX - X^2$$

$$Y^2 = kX - X^2$$

$$\Rightarrow Y^2 + X^2 - kX = 0$$

$$Y^2 + \left[X^2 - 2X \frac{k}{2} + \left(\frac{k}{2}\right)^2 \right] = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

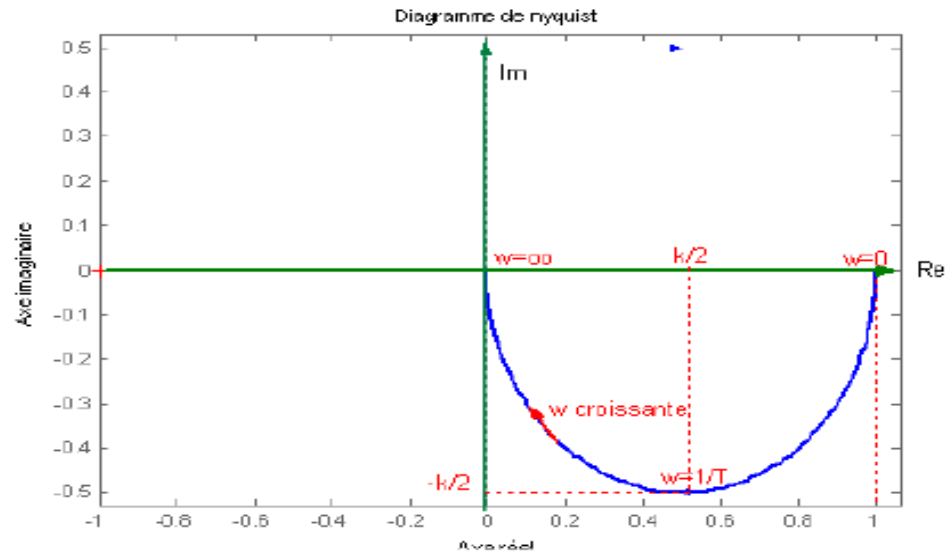
$$\Rightarrow \left(X - \frac{k}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

Le lieu de Nyquist est un cercle de centre $\left(\frac{k}{2}, 0\right)$ et de rayon $\left(\frac{k}{2}\right)$

Or $\forall \omega \in [0, \infty[$, on a $\begin{cases} X > 0 \\ Y < 0 \end{cases}$

ω	$\omega = 0$	$\omega = 1/\tau$	$\omega \rightarrow \infty$
X	k	k/2	0
Y	0	-k/2	0

Donc le diagramme de Nyquist est un demi-cercle.



Allure de Nyquist pour un système de 1^{er} ordre

IV.2. Etude harmonique de système premier ordre généralisé

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = k \frac{1 + \lambda \tau j\omega}{1 + \tau j\omega} = H_1(j\omega) \times H_2(j\omega)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} H_1(j\omega) = \frac{k}{1 + \tau j\omega} \\ H_2(j\omega) = 1 + \lambda \tau j\omega \end{cases} \text{ et } \begin{cases} |H_1(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \\ |H_2(j\omega)| = \sqrt{1 + (\lambda\tau\omega)^2} \end{cases}$$

1. Diagramme asymptotique de Bode

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}{\sqrt{1 + (\lambda\tau\omega)^2}}$$

$$\text{Module : } |H|_{dB} = 20 \log_{10} |H| = 20 \log_{10} |H_1| + 20 \log_{10} |H_2|$$

$$\text{Argument : } \text{Arg}[H(j\omega)] = \text{arg}[H_1(j\omega)] + \text{arg}[H_2(j\omega)]$$

Premier cas ($\lambda > 1$) système à avance de phase

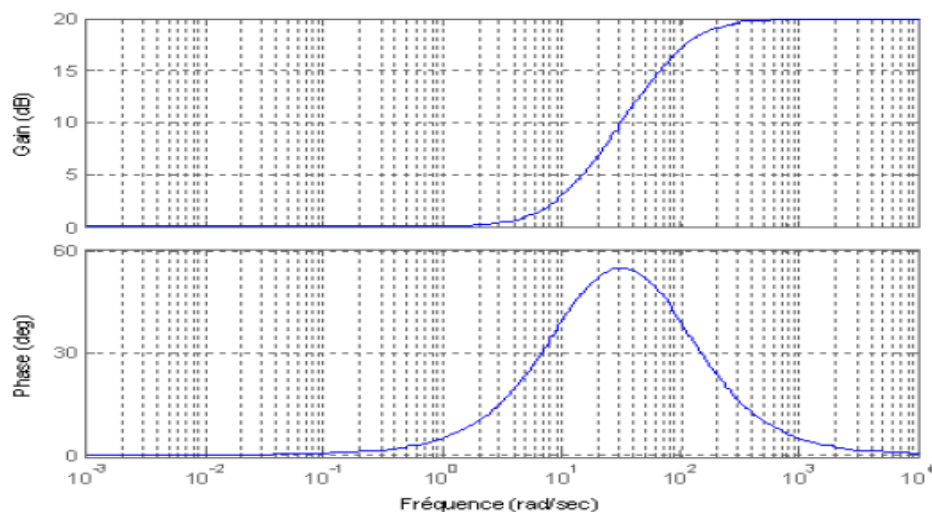


Diagramme de Bode d'un système de 1^{er} ordre généralisé $\lambda = 10 > 1$

Deuxième cas ($\lambda < 1$) système à retard de phase

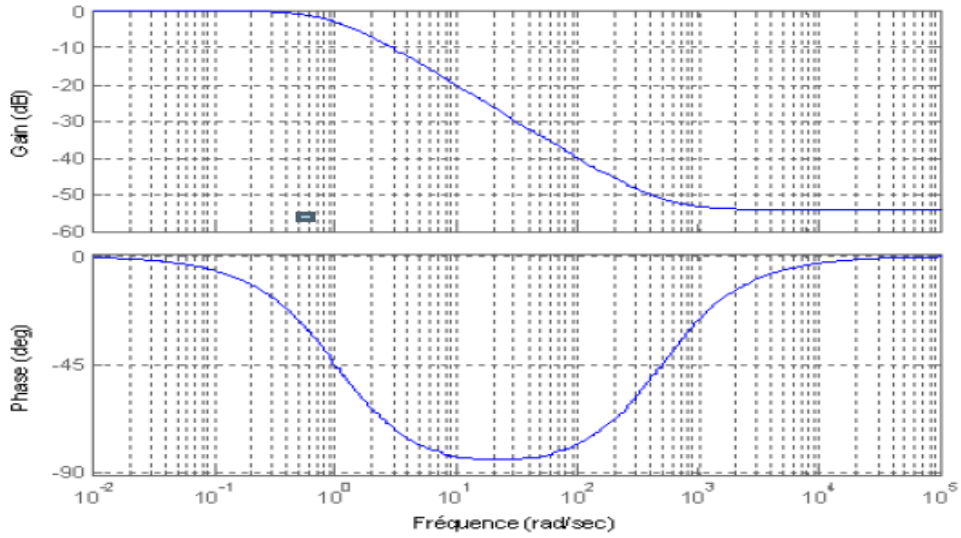


Diagramme de Bode d'un système de 1^{er} ordre généralisé $\lambda = 0.002 < 1$

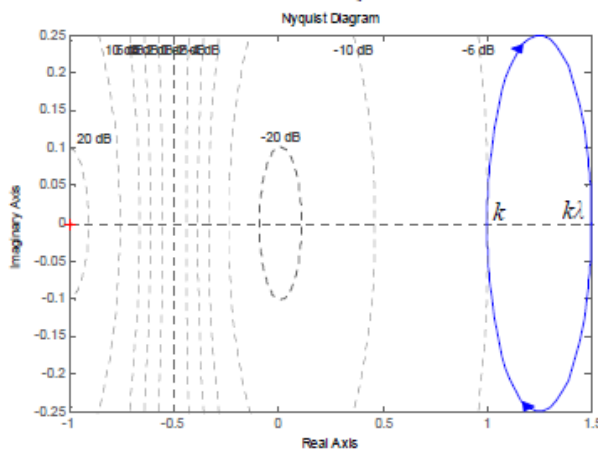
3. Lieu de Nyquist

$$H(j\omega) = k \frac{1 + \lambda(\tau\omega)^2}{1 + (\tau\omega)^2} + jk \frac{(\lambda - 1)\tau\omega}{1 + (\tau\omega)^2} = X + jY$$

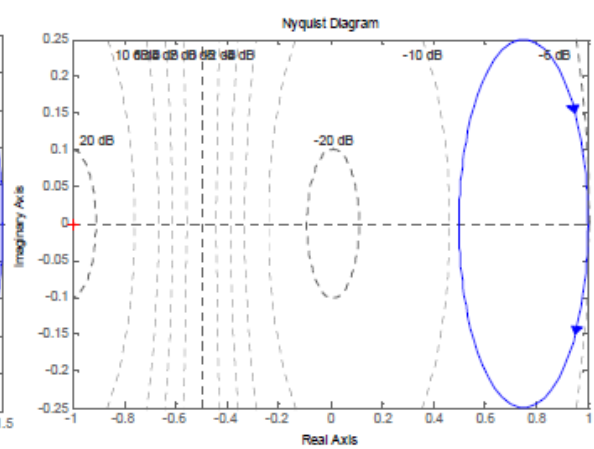
$$\Rightarrow Y^2 + \left(X - \frac{k(\lambda + 1)}{2} \right)^2 = \left(\frac{k(\lambda - 1)}{2} \right)^2$$

$$\text{pour } \omega = 0 \begin{cases} X = k \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$\text{pour } \omega \rightarrow \infty \begin{cases} X = k\lambda \\ Y \rightarrow 0 \end{cases}$$



Système à avance de phase ($Y > 0$)



Système à retard de phase ($Y < 0$)

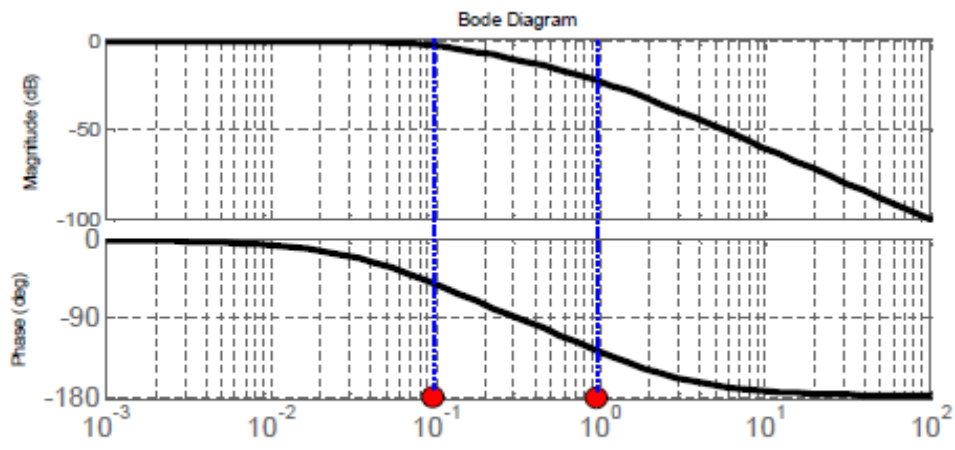
III.3. Etude harmonique d'un système de 2eme ordre

a. Système hyper amorti ($m > 1$)

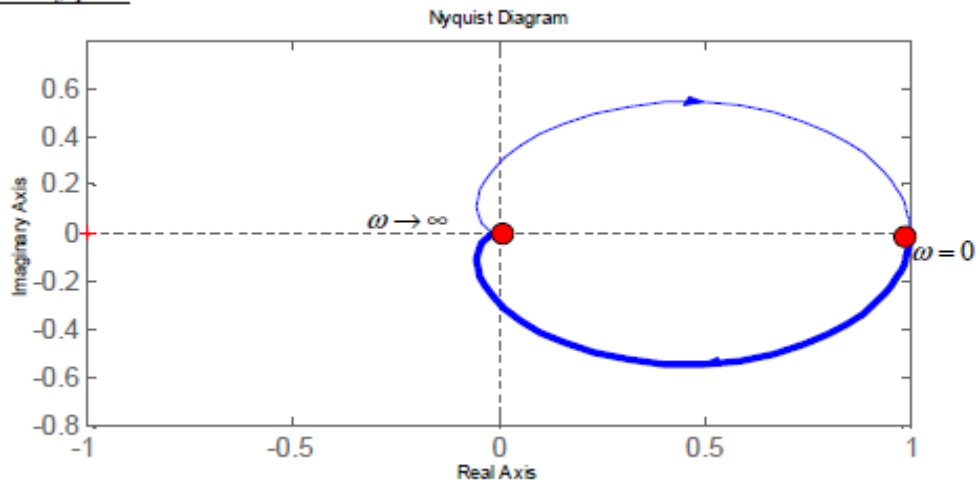
$$\frac{k}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

$$H(p) = \frac{1}{(1 + p)(1 + 10p)} = \frac{0.1}{p^2 + 1.1p + 0.1} \begin{cases} p_1 = -1/\tau_1 = -0.1 \\ p_2 = -1/\tau_2 = -1 \end{cases}$$

Lieu de Bode



Lieu de Nyquist



b. Système du second ordre oscillant amorti ($0 < m < 1$)

La transmittance harmonique du système est $H(j\omega) = \frac{k\omega_0^2}{-\omega^2 + 2jm\omega_0 + \omega_0^2}$

Posons $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ pulsation normalisée (réduite).

a. Diagramme de Bode

$$H(ju) = \frac{k}{1-u^2 + 2jmu}$$

Posons $|H(ju)| = |H|$

$$\begin{cases} |H(ju)| = \frac{k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4m^2u^2}} \\ \varphi = \arg[H(ju)] = -\operatorname{arctg}\left(\frac{2mu}{1-u^2}\right) \end{cases}$$

- Pour $\omega = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Rightarrow \begin{cases} |H| = k & \text{ou } |H|_{dB} = 20\log_{10}(k) \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$
- Pour $\omega = \omega_0 \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| = \frac{k}{2m} & \text{ou } |H|_{dB} = 20\log_{10}(k) - 20\log_{10}(2m) \\ \varphi = -90^\circ \end{cases}$
- Pour $\omega \ll \omega_0 \Leftrightarrow u \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| = k \Rightarrow |H|_{dB} = 20\log_{10}(k) \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$
- Pour $\omega \gg \omega_0 \Leftrightarrow u \gg 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| = \frac{k}{u^2} & \text{ou } |H|_{dB} = 20\log_{10}(k) - 40\log_{10}(u) \\ \varphi = -180^\circ \end{cases}$

Calcul de la pulsation de résonance

$$\frac{d|H(ju)|}{du} = \frac{k}{2} \frac{4u^3 - 4u + 8mu^2}{\left[(1-u^2)^2 + (2mu)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d|H(ju)|}{du} = 0 \Leftrightarrow u(4u^2 - 4 + 8m^2) = 0$$

$$\begin{cases} u = 0 \\ 4u^2 - 4 + 8m^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_r = \sqrt{1 - 2m^2}$$

Or $u_r = \frac{\omega_r}{\omega_0}$ donc $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$ pulsation de résonance

ω_r est définie quand $1 - 2m^2 > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

$$|H_{\max}| = |H(j\omega_r)| = \frac{k}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

Facteur de résonance :

$$Q(m) = \frac{|H_{\max}|}{|H(0)|} = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

Pic de résonance :

$$MP = 20 \log Q = 20 \log \frac{|H_{\max}|}{|H(0)|}$$

La valeur optimale de de $MP=2.3\text{dB}$ correspond à $Q=1.3$ et $m=0.42$

Fréquence de résonance :

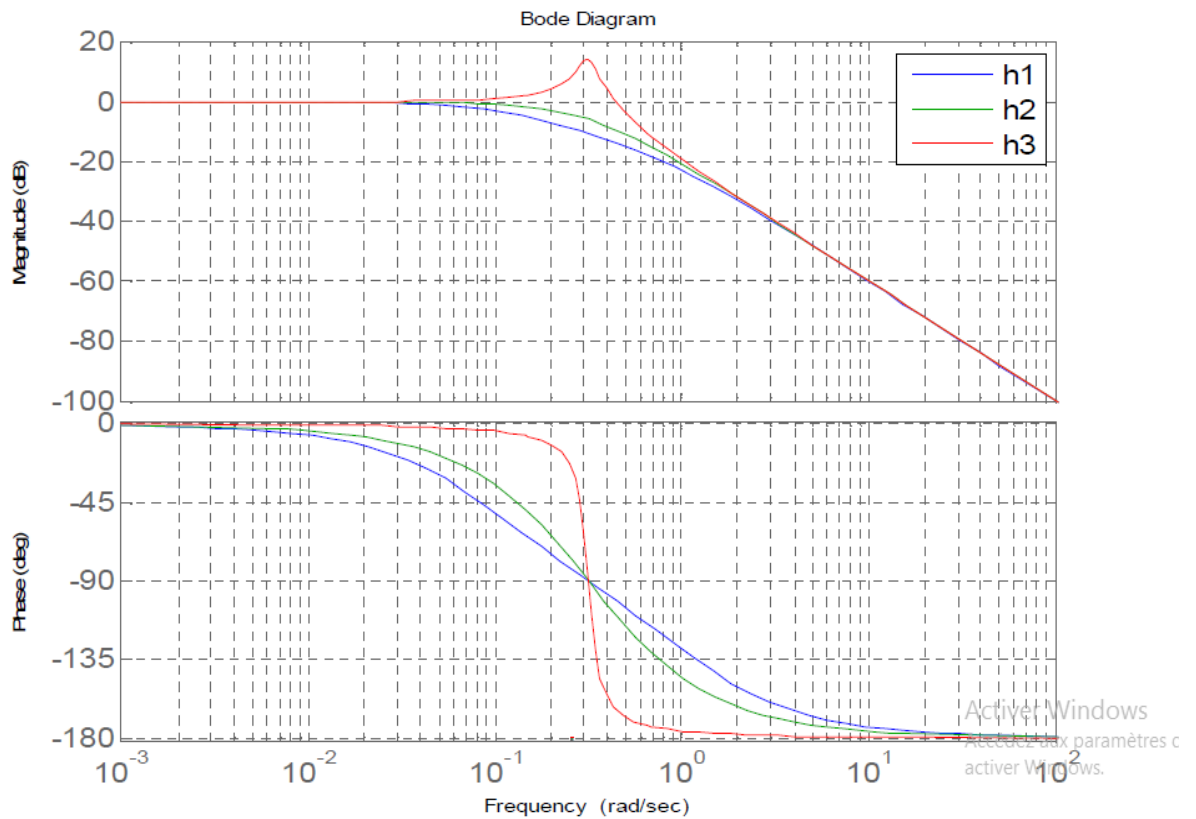
$$fr = \frac{\omega_r}{2\pi} \text{ avec } \omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2m^2} \text{ pour } 0 < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La bande passante à -3dB :

$$\omega_{BP} = \omega_0 \sqrt{(1-2m^2) + \sqrt{4m^4 - 4m^2 + 2}}$$

$$\text{pour } m = 0 \Rightarrow \omega_{BP} = 1.55\omega_0$$

$$\text{pour } m = 1 \Rightarrow \omega_{BP} = 0.64\omega_0$$



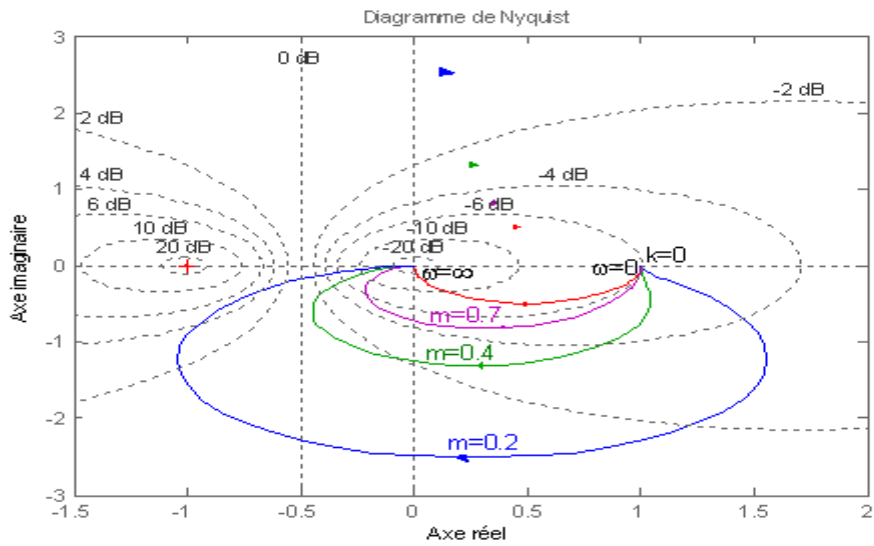


Diagramme de Nyquist pour les différentes valeurs de m pour un système de second ordre

Chapitre V. Stabilité des Systèmes Linéaires

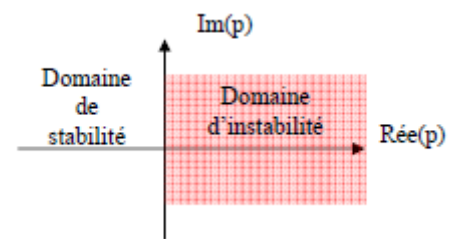
V.1. Conditions de stabilité des Systèmes linéaires

Un système asservi linéaire est stable si les parties réelles des pôles (solution de $D(p) = 0$) sont négatives. c.à.d. tous les **pôles de sa fonction de transfert** sont strictement à gauche de l'axe imaginaire dans le plan complexe dédié à p .

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Equation caractéristique :

$$D(p) = 0 \Rightarrow a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$



Exemples

a. $H(p) = \frac{p-2}{(p+2)(p+1)}$, $z_1 = 2, p_1 = -1, p_2 = -2$ **le système est stable les pôles sont négatifs**

b. $H(p) = \frac{p-2}{(p^2+2)(p+1)}$, $z_1 = 2, p_1 = -1, p_2 = -\sqrt{2}j, p_3 = \sqrt{2}j$ **le système est marginalement stable partie réel des pôles est nuls**

c. $H(p) = \frac{p-2}{(p+2)(p-1)}$, $z_1 = 2, p_1 = 1, p_2 = -2$ **le système est instable les pôles sont positifs**

Cette condition nécessaire et suffisante nécessite un calcul des racines ce qui rend les calculs plus lourds lorsque l'ordre du système est élevé.

V.2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Soit $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ la fonction de transfert d'un système. Les pôles de $H(p)$ sont les racines de

l'équation $D(p) = 0$. On écrit $D(p)$ sous la forme suivante $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0$

Table de Routh

Les deux premières lignes du tableau sont écrites à l'aide des coefficients de $D(p)$. Les autres lignes sont formées de termes calculés à partir de ces coefficients.

Ligne1	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_0
Ligne2	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_1
Ligne3	b_1	b_2	b_3	b_n
Ligne3	c_1	c_2	c_3		c_1
...					
Ligne(n+1)	q_1	q_2	q_3	q_n

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}; \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}; \quad b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}; \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_2}{b_1};$$

La condition nécessaire de stabilité exprimée par le tableau de Routh est la suivante :

- ✚ Tous les termes « a_i » existent et sont de même signe (>0).
- ✚ Tous les éléments de la 1^{ère} colonne du tableau de Routh doivent être strictement positifs.

Remarques

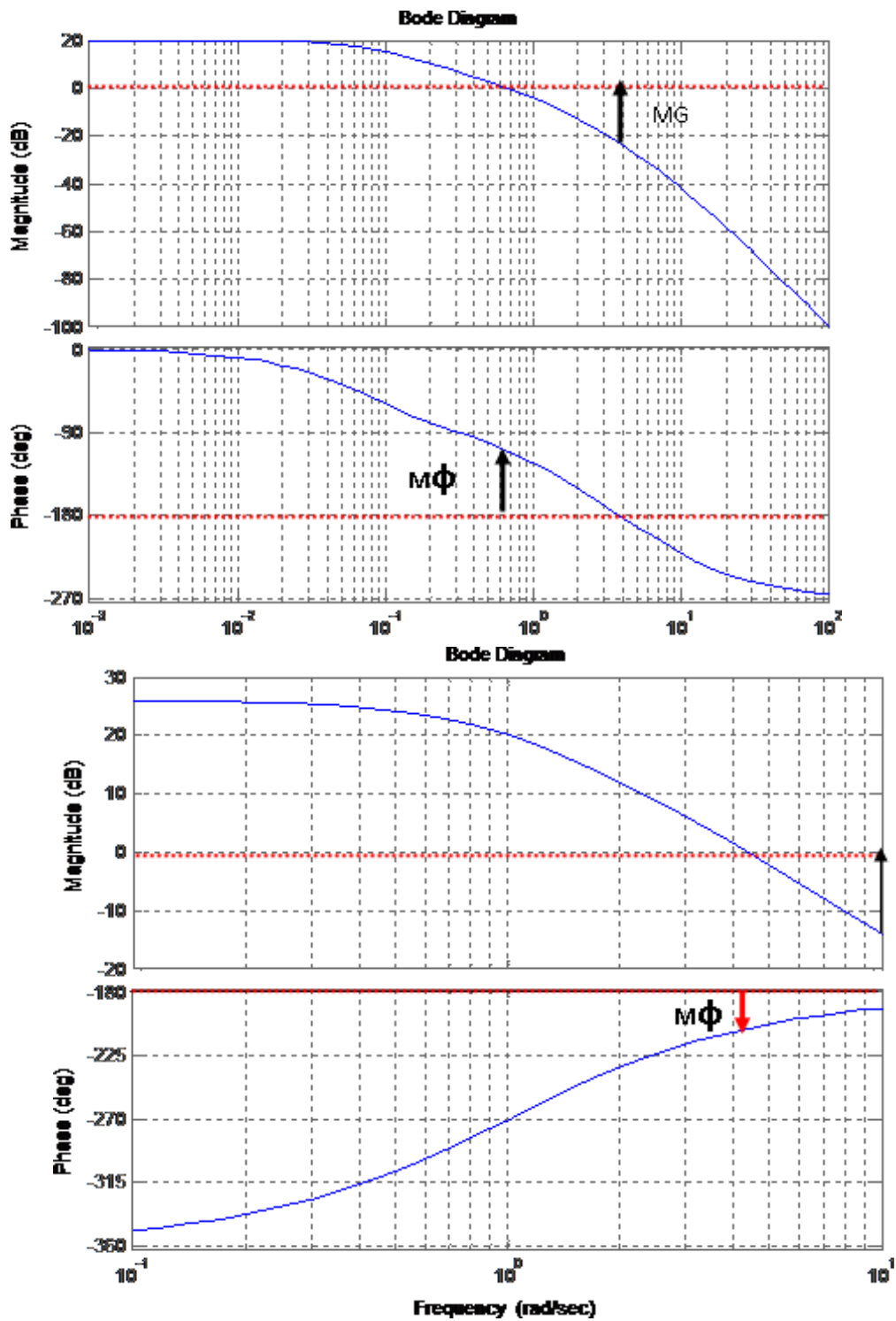
- ✚ le nombre de changement de signe dans la 1^{ère} colonne du tableau de Routh est égal au nombre des racines (des pôles) de $D(p)$ à partie réelle positive.
- ✚ Si le système est d'ordre n , on a $(n+1)$ coefficients sur la 1^{ère} colonne du tableau de Routh.
- ✚ Si l'un des éléments de la 1^{ère} colonne est égal à zéro, le système est asymptotiquement ou marginalement stable.

V.3. Critère géométrique de Rivers

V.3.1. Critère de Rivers dans le plan de Bode

Un système stable en boucle ouverte est stable en boucle fermée si la courbe de gain de $|T(j\omega)|_{dB}$ coupe l'axe des abscisses pour une phase $\varphi(\omega) > -180$.

Exemple :



Le système est instable en BF car $MG > 0$ et $M\phi < 0$

V.3.2. Marges de stabilité

a. Marge de Gain : MG Définition 1:

La marge du gain est le facteur par lequel il faut multiplier le gain de la fonction de transfert en Boucle ouverte pour amener son module à la valeur unitaire.

$$MG = \frac{1}{\|OA\|} \Rightarrow MG_{dB} = -20 \log(\|OA\|)$$

Définition2 :

C'est l'écart en gain par rapport à **0dB** lorsque le déphasage est **-180°**

$$MG_{dB} = -20 \log|T(j\omega_A)| \text{ avec } \text{Arctang}(T(j\omega_A)) = -\pi$$

Remarques :

- ✚ Si la $MG_{dB} > 0$, le système est stable en BF.
- ✚ Si la $MG_{dB} < 0$, le système est instable en BF.
- ✚ Si la $MG_{dB} = 0$, le système est juste oscillant en BF

b. Marge de Phase : Mφ

C'est l'écart en phase par rapport à -180° lorsque le gain du système en boucle ouverte est égal à 1 (0dB)

$$M\varphi = \text{Arg}(T(j\omega_B)) + \pi \text{ avec } |T(j\omega_B)|_{dB} = 0$$

Remarques :

- ✚ Si la $M\varphi > 0$, le système est stable en BF.
- ✚ Si la $M\varphi < 0$, le système est instable en BF.
- ✚ Si la $M\varphi = 0$, le système est juste oscillant en BF En pratique, la $M\varphi > 45^\circ$

Bibliographiques

1. E. K. Boukas, Systèmes asservis, Editions de l'école polytechnique de Montréal, 1995.
2. P. Clerc. Automatique continue, échantillonnée : IUT Génie Electrique-Informatique Industrielle, BTS Electronique- Mécanique-Informatique, Editions Masson (198p), 1997
3. . P. Codron et S. Leballois, Automatique : systèmes linéaires continus, Editons Dunod 1998.
4. Y. Granjon, Automatique : Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, Editions Dunod 2001.
5. . K. Ogata, Modern control engineering, Fourth edition, Prentice Hall International Editions 2001.
6. B. Pradin, Cours d'Automatique. INSA de Toulouse, 3ème année spécialité GII.
7. M. Rivoire et J.-L. Ferrier, Cours d'Automatique, tome 2 : asservissement, régulation, commande analogique, Editions Eyrolles 1996.
8. . Y. Thomas, Signaux et systèmes linéaires : exercices corrigées, Editions Masson 1993.
9. Y. Thomas. Signaux et systèmes linéaires, Editions Masson 1994