جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسييـــر

قسم مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية LMD-SEGC
السنـــة الأولـــى

مُحاضراتٌ في مِقياسِ

الإحْصَـــاءِ الرِّياضِيّ.

المحور الرابع: التوزيعات الاحتمالية.

الجزء الأول: التوزيع الاحتمالي المتقطع.

إعداد الدكتور هاشمي عبابسة.

h.ababsa@univ-biskra.dz

statdesc2018@gmail.com

المحور الرابع: التوزيعات الاحتمالية.

الجزء الأول: التوزيع الاحتمالي المتقطع.

درسنا سابقا في الإحصاء الوصفي عدة مقاييس إحصائية وصفية ارتبطت بمتغيرات إحصائية جارية. هذه المتغيرات تأخذ قيما محددة تُعبِّرُ عن وقائع حدثت فعلا، وقد استخدمنا آنذاك - لوصف العينات– ما يسمى "**التوزيع التكراري**".

أما الجانب الآخر من الإحصاء فهو الإحصاء الاستدلالي، الذي يتناول متغيرات إحصائية من نوع آخر تُسمى" **المتغيرات الاحتمالية أو العشوائية** "، وهي متغيرات لسنا متأكدين تماما من القيم التي ستأخذها.

وبدلا من استخدام التوزيع التكراري للعينة، سنهتم بالتوزيع التكراري للمجتمع، والذي يسمى توزيعا احتماليا.

أ. المتغير العشوائي: هو المتغير الذي يمكن أن يأخذ أيّـاً من القيم الرقمية الممكنة التي تفرزها نتائج تجربة عشوائية (أي من فضاء الإمكانيات Ω). والمتغير العشوائي نوعان: منفصل ومتصل.

1. **المتغير العشوائي المنفصل**: هو المتغير الذي يمكن أن يأخذ عددا محصورا ومحدَّدا من القيم.
2. **المتغير العشوائي المتصل**: هو الذي يمكن أن يأخذ عددا غير محدود من القيم ضمن مجال معين.

ب. التوزيعات الاحتمالية: حسب نوع المتغير العشوائي يمكن التمييز بين نوعين من التوزيعات الاحتمالية:

1. **التوزيعات الاحتمالية المتقطعة:** إذا كان X متغيراً عشوائيا يمكن أن يأخذ مجموعة من القيم المتقطعة: x_1، x_2 ... ، x_k باحتمالات P_1، P_2، ...، P_k على الترتيب – حيث: $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$ ، فإنه يمكن القول أن هذا يعد تعريفا لتوزيع احتمالي متقطع للمتغير X .

إذن فالتوزيع الاحتمالي المتقطع للمتغير X هو التطبيق الذي يرفق الإمكانيات x_i باحتمالات تحققها P_i حيث: $P_i \geq 0$ و $\sum P = 1$.

مثال1: *رمينا زهرتي نرد تِباعا. نفرض أن X متغير عشوائي يعبر عن مجموع النقاط المتحصل عليها من النردين.*

1) *حدد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير.*
2) *ما هو احتمال الحصول على المجموع 5 ؟*

الجواب :

1) تحديد التوزيع الاحتمالي لـــ X : سنرفق كل قيمة x_i من فضاء الإمكانيات باحتمال تحققها:

الجدول رقم 02: التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	المجموع
$P(x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/26	1/36	**36/36**

المصدر: معطيات المثال 01.

يمكن اعتبار هذا الجدول بمثابة توزيع احتمالي للمتغير X.

2- حساب احتمال الحصول على المجموع 5 :

من الجدول: $P(X = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

لاحظ أن هذا التوزيع مناظر للتوزيع التكراري النسبي في الإحصاء الوصفي، حيث حلَّت الاحتمالاتُ محلَّ التكرارات النسبية f_i ، ولهذا يمكن اعتبار التوزيعات الاحتمالية صورةً مثاليةً أو توزيعا نظريا للتوزيع التكراري النسبي -الذي عرفناه في مقياس الإحصاء الوصفي- عندما يكون عدد الشاهدات كبيراً جدا.

ولهذا السبب يمكن ننظر للتوزيعات الاحتمالية كتوزيعات للمجتمعات، بينما التوزيعات التكرارية النسبية كتوزيعات للعينات المسحوبة من هذه المجتمعات. يمكن تمثيل التوزيعات الاحتمالية بيانياً.

- **التوزيع الاحتمالي التراكمي (تابع التوزيع) :** بتجميع الاحتمالات السابقة نحصل على التوزيع الاحتمالي التراكمي، و المقابل للتوزيع التكراري المجتمع. يسمى باختصار " **تابع التوزيع** ". يمكن تعريفه كما يلي: $F(x_k) = p(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i).$

ولذلك يمكن أن نكتب "F" كما يلي: [نفرض أن هناك "N" قيمة ممكنة لـــ X]

$$\mathrm{F}(x_k) = \begin{cases} 0 \ (\text{حدث مستحيل}) & -\infty < x_k < x_1 \\ \mathrm{P}(x_1). & x_1 \leq x_k < x_2 \\ \mathrm{P}(x_1) + \mathrm{P}(x_2). & x_2 \leq x_k < x_3 \\ \mathrm{P}(x_1) + \mathrm{P}(x_2) + \cdots + \mathrm{P}(x_N) = 1 \quad (\text{حدث أكيد}) & x_N \leq x_k < +\infty \end{cases}$$

مثال2: *نرمي قطعة نقود متوازنة مرتين متتاليتين نفرض أن X متحول عشوائي يمثل عدد الأوجه "F" (Face)*

1) حدد التوزيع الاحتمالي لـــــ X .

2) حدد تابع التوزيع الاحتمالي لـــــ X .

الجواب :

1) تحديد التوزيع الاحتمالي لــــ X : بدايةً نحدد القيم الممكنة لـــــ X :

الجدول رقم 03: القيم الممكنة للمتغير X.

فضاء المعاينة	FF	FP	PF	PP
قيم X الممكنة.	2	1	1	0

المصدر: معطيات المثال 02.

وعليه يكون التوزيع الاحتمالي لـــ X كما يلي:

الجدول رقم 04: التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

x_i	0	1	2	المجموع
$P(x_i)$	$^1/_4$	$^2/_4$	$^1/_4$	**1**

__المصدر__: معطيات المثال 02، والجدول رقم 03.

2) تحديد تابع التوزيع الاحتمالي لـــ X:

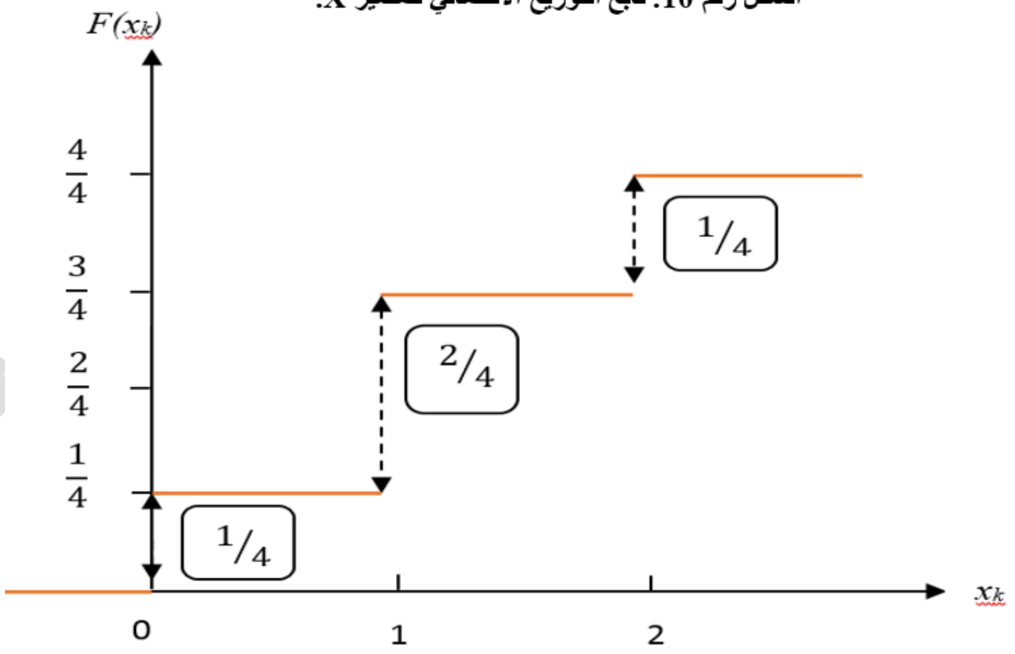
الجدول رقم 05: تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

x_i	$P(x_i)$	موقع x_k	$F(x_k)=P(X \leq x_k)$
0	$^1/_4$	$-\infty < x_k < 0$	0
1	$^2/_4$	[لا يظهر F] .... $0 \leq x_k < 1$	$^1/_4$
2	$^1/_4$	[يظهر F مرة "أو" لا يظهر].... $1 \leq x_k < 2$	$^3/_4$
		[يظهر F مرتين "أو" مرة "أو" لا يظهر] $2 \leq x_k < +\infty$	$^4/_4$
/	$^4/_4$	/	/

__المصدر__: معطيات المثال 02، والجدول رقم 04.

يمكن تمثيل تابع التوزيع الاحتمالي بيانيا.

الشكل رقم 10: تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير X.



المصدر: الجدول رقم 05.