الفصل الرابع: تحليل الحساسية

Sensitivity analysis

1. تغير قيم معاملات المغيرات في دالة الهدف.
2. تغير قيم الطرف الأيمن من القيود.
3. التغير في معاملات المتغيرات في القيود.
4. إضافة متغيرة جديدة.
5. إضافة قيد جديد.

الفصل الرابع: تحليل الحساسية
Sensitivity analysis

عند استخدام البرمجة الخطية لنمذجة حالات الحقيقية نحتاج غالبًا إلى حل البرامج الخطية الجديدة التي تم الحصول عليها من خلال إجراء تغييرات صغيرة على المشكلات التي تم حلها بالفعل. يمكن أن يحدث هذا لأسباب مختلفة منها:

— قد تكون المعلمات عبارة عن تقديرات للكميات الرئيسية ، لاحقًا بمزيد من المعلومات قد يكون لدينا تقديرات أفضل.

— حتى إذا كانت المعاملات دقيقة تمامًا ، فقد تتغير بمرور الوقت ، على سبيل المثال ، إذا احتجنا إلى مراعاة سعر بعض الموارد ، نظرًا لأن هذا السعر يتغير ، فسنرغب في تحديث نموذجنا.

— قد ندرك أننا نسينا أحد المتغيرات في القيود ،و فجأة أصبح لدينا متغير إضافي نريد أن نعرف عنه في النموذج الرياضي.

— قد نرغب في استبدال أي معاملات تم تقديرها بتقديرات أكثر تشاؤمًا لحساب سيناريو أسوأ حالة. **(Antolin camarena, 2020, p. 01)**

وبالنظر لكثرة التغيرات التي يمكن أن تحدث، فإن عملية إعادة حل البرنامج الخطي يمكن أن تكون مجهدة وتتطلب حسابات كثيرة، مما يؤدي إلى ضياع الوقت و احتمال الوقوع في أخطاء حسابية .ولتجاوز مثل هذه المشكلات يتم إستخدام ما يسمى بـ: **«تحليل الحساسية»** أو **«تحليل ما بعد الأمثلية»** ، والذي يدرس أثر التغيرات التي يمكن أن تحدث في البرنامج الخطي، وذلك بالاعتماد على آخر جدول عند حله بطريقة السمبلكس (جدول الحل الأساسي الأمثل)دون اللجوء إلى إعادة حله مجددا.

إذ يستخدم أسلوب تحليل الحساسية جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي لتحديد المدى المسموح به في التغيرات التي تحدث في البرنامج الخطي والتي لا تؤثر على الحل الأمثل. **(ريغي، 2021، صفحة 61)**
وسيتم دراسة العديد من أنواع التغييرات التي يمكن أن تحدث على البرنامج الخطي:

— تغير قيم معاملات المغيرات في دالة الهدف؛

— تغير قيم الطرف الأيمن من القيود؛

— التغير في معاملات المتغيرات في القيود؛

— إضافة متغيرة جديدة؛

— إضافة قيد جديد.

ليكن لدينا النموذج التالي والحل الأمثل له (هذا المثال تم حله سابقا):

$$Mix\ Z = 50x_1 + 60x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1000 \\ x_1 \geq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	50	60	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
0	S_1	0	1	1	1	-1	850
50	x_1	1	1	0	1	0	1000
Zj		0	50	0	50	0	50000
Cj-Zj		50	10	0	M-50	M	

1. تغير قيم معاملات المتغيرات في دالة الهدف:

- <u>تغير قيم معاملات المتغيرات خارج الأساس:</u>

المتغيرة X_2 هي متغيرة خارج الأساس. فإذا إفترضنا أن قيمة معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير بمقدار ∆ فما هي القيم التي يجب أن تأخذها ∆ حتى يبقى الحل أمثلا ؟

نكتب قيمة المعامل الجديدة للمتغيرة X_2 في دالة الهدف في السطر Cj ونعيد حساب قيم Cj-Zj في السطر الأخير، ونتحصل على الجدول التالي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	50	60+ ∆	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
0	S_1	0	1	1	1	-1	850
50	x_1	1	1	0	1	0	1000
Zj		0	50	0	50	0	50000
Cj-Zj		50	10+ ∆	0	M-50	M	

يبقى الجدول السابق أمثلا ، إذا بقيت جميع قيم السطر الأخير Cj-Zj أكبر من أو تساوي الصفر ما دامت دالة الهدف في حالة التقليل.

يـ ,لاحظ أن السطر الأخير يحتوي على مجهولين M و Δ ، إلا أننا قلنا سابقا أن M هي قيمة موجبة كبيرة جدا ً ، وبالتالي فإن قيمة الخانات التي تحتوي على M تبقى موجبة .إذا يبقى الحل الأمثل إذا كانت قيمة Cj-Zj أكبر من أو تساوي الصفر، أي:

$$10+\Delta\geq0 \Rightarrow \Delta\geq-10$$

أي:

$$\Delta \in [-10\ +\infty[$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_2 في دالة الهدف أكبر من أو تساوي 10- ، فإن نقطة الحل الأمثل لا تتغير . وبعبارة أخرى:

$$C_2\geq60+\Delta \Rightarrow C_2\geq60-10 \Rightarrow C_2\geq50$$

أي:

$$C_2 \in [50\ +\infty[$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة C_2 أكبر من أو تساوي 50 ، فإن نقطة الحل الأمثل لا تتغير.

- لنفترض أن قيمة C_2 إرتفعت بوحدة واحدة (تغير داخل المجال)، ستكون نقطة الحل الأمثل كما يلي:

$X_1 = 1000$, $X_2 = 0$, $S_1 = 850$, Min Z=50000

ويلاحظ بقاء نفس متغيرات الأساس وقيمها وقيمة دالة الهدف.

- لنفترض أن قيمة C_2 إنخفضت بوحدة واحدة(تغير خارج المجال)، ستكون نقطة الحل الأمثل كما يلي:

$X_1 = 150$, $X_2 = 850$, $S_1 = 0$, Min Z=49150

ويلاحظ أن نقطة الحل الأمثل تغيرت .وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة معامل المتغيرة X_2 في دالة الهدف خارج المجال المسموح به، فهذا يعني أن جدول الحل الأخير سيصبح غير أمثل، وبالتالي يجب متابعة الحل إنطلاقا ً من هذا الجدول.

– <u>تغير قيم معاملات متغيرات الأساس:</u>

المتغيرة X_1 هي متغيرة داخل الأساس .فإذا إفترضنا أن معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير بمقدار Δ ، فما هي القيم التي يجب أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل الأمثل ؟

نكتب قيمة المعامل الجديد للمتغيرة X_1 في دالة الهدف في السطر Cj وأيضا ً في العمود C^B_i ، ونعيد حساب قيم السطر Cj-Zj، ونتحصل على الجدول التالي:

C_i^B	C_j / X_i^B	50+ Δ	60	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
0	S_1	0	1	1	1	-1	850
50+ Δ	x_1	1	1	0	1	0	1000
Zj		50+ Δ	50+ Δ	0	50+ Δ	0	50000+1000 Δ
Cj-Zj		0	10- Δ	0	M-50- Δ	M	

يبقى الجدول السابق أمثلا إذا بقيت جميع قيم السطر Cj-Zj أكبر من أو تساوي الصفر ما دامت دالة الهدف في حالة التقليل . وعلى هذا الأساس يجب أن تبقى قيم الخلايا في السطر Cj-Zj المكتوبة بدلالة Δ كلها أكبر من أو تساوي الصفر، أي الخانة C_2-Z_2 ، مع إستبعاد الخلية C_4-Z_4 ، لأنها تبقى موجبة مهما كانت قيمة Δ، لأن قيمة M هي قيمة موجبة كبيرة. إذا ، يبقى الحل أمثلا عندما:

$$10-\Delta\geq 0\Rightarrow \Delta\leq 10$$

أي:

$$\Delta\in]-\infty, 10]$$

ملاحظة:

– عند دراسة حساسية قيم معاملات المتغيرات في دالة الهدف وكانت هذه الأخيرة في حالة التعظيم، فإن الحل يبقى أمثل كلما بقيت قيم السطر Zj-Cj أكبر من أو تساوي الصفر.

2. تغير قيم الطرف الأيمن من القيود:

يمكن دراسة أثر تغير قيم الطرف الأيمن من القيود على الحل الأمثل من خلال المثال التالي:

لنفترض أن النموذج تغير كما هو موضح في البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Mix } Z = 50x_1 + 60x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1000 \\ x_1 \geq 150+\Delta \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

يكتب جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	50	60	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
M	R_1	1	1	0	1	0	1000
M	R_2	1	0	-1	0	1	150+Δ
Zj		2M	M	-M	M	M	1150M
Cj-Zj		50-2M	60-M	M	0	0	

نعيد كتابة الجدول السابق كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	50	60	0	M	M	$R+\Delta$ النتيجة
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	
M	R_1	1	1	0	1	0	1000+0
M	R_2	1	0	-1	0	1	150+1
Zj		2M	M	-M	M	M	1150M
Cj-Zj		50-2M	60-M	M	0	0	

يلاحظ أن قيم معاملات العمود (النتيجة $R+\Delta$) لها نفس قيم معاملات عمود المتغيرة المكملة S_1 (مضروبة في-1) ، ونفس قيم معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية R_2. وهذا يعني أن قيم العمود (النتيجة $R+\Delta$) في الجدول الأخير الأمثل ستكون نفسها قيم معاملات العمود S_1 (مضروبة في-1)، أو قيم معاملات العمود R_2 في نفس الجدول لأن جميع العمليات التي تجرى على صفوف الأعمدة الخاصة بالمتغيرتين S_1 و R_2 تجرى أيضا على صفوف العمود (النتيجة $R+\Delta$).

- يعاد كتابة جدول الحل الأمثل كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	50	60	0	M	M	R
		x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	النتيجة
0	S_1	0	1	1	1	-1	850-Δ
50	x_1	1	1	0	1	0	1000+0Δ
Zj		0	50	0	50	0	50000
Cj-Zj		50	10	0	M-50	M	

ولكي يبقى الحل أمثلا وممكنا يجب أن تبقى:

$x_1 \geq 0$ و $S_1 \geq 0$ أي:

$850-\Delta \geq 0$

$\Delta \leq 850$

و $\Delta \in]-\infty\ 850]$

ويلاحظ أن قيمة x_1 لن تصبح سالبة مهما كانت قيمة Δ .

3. التغير في قيم معاملات المتغيرات في القيود:

يمكن في بعض الأحيان بسبب التطورات التكنولوجية إستبدال الآلات القديمة بأخرى جديدة أكثر تطورا ، أو يمكن إحلال الآلات محل العمال أيلغها إحلال العمالة الماهرة مكان العمالة الأقل مهارة، ...الخ . ومثل هذه التغيرات يمكن أن تؤثر على ما تتطلبه المنتجات من عوامل الإنتاج الداخلة في عملية إنتاجها، وهو ما يؤدي إلى تغير في معاملات المتغيرات في القيود . وعند حدوث هذا لا بد من دراسة أثر هذه التغيرات على الحل الأمثل للبرنامج الخطي.

مثال:

$$\text{Mix } Z = 3x_1 + 3/2x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

يكون جدول الحل الأمثل كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	3	3/2	2	0	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_2	R_3	
0	S_1	0	0	7/5	1	1/5	-1/5	-1/5	53/5
3	x_1	1	0	-1/5	0	-3/5	3/5	-2/5	6/5
3/2	x_2	0	1	4/5	0	2/5	-2/5	3/5	16/5
Zj		3	3/2	3/5	0	-6/5	6/5	-3/10	42/5
Cj-Zj		0	0	7/5	0	6/5	M-6/5	M+3/10	

سنحاول دراسة حساسية قيم معاملات المتغيرات حسب ترتيب هذه الأخيرة كما يلي:

المتغيرة X_1

يلاحظ أن المتغيرة الحقيقية X_1 هي متغيرة داخل الأساس .ويتم دراسة حساسية قيمة معامل هذه المتغيرة حسب القيد الذي تنتمي إليه كما يلي:

– القيد الأول :سعر ظله يساوي الصفر:

يتم دراسة حساسية قيمة معامل المتغيرة، مع العلم أن القيد إشارته" أقل من أو يساوي"، كما يلي:

$$\Delta a_{ij}^{*} = \frac{\text{قيمة المتغيرة المكملة في العمود } bi}{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية داخل الأساس}} = \frac{\text{قيمة المتغيرة المكملة في العمود } S1}{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية } x1} = \frac{\frac{53}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{53}{6}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_1 أقل من أو تساوي 53/6 ، فإن الحل يبقى أمثلا .

$$w = a_{11} + \Delta a_{ij}^{*} = 1 + \frac{53}{6} = \frac{59}{6}$$

إذن: كلما كانت القيمة بالشكل التالي فإن الحل يبقى أمثلا.

$$a_{11}^{*} \leq \frac{59}{6}$$

– القيد الثاني :سعر ظله يساوي: 6/5

أي تغير في قيمة معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

– القيد الثالث :سعر ظله يساوي 3/10- :

أي تغير في قيمة معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

المتغيرة X_2 :

يلاحظ أن المتغيرة الحقيقية X_2 هي متغيرة داخل الأساس. ويتم دراسة حساسية قيمة معامل هذه المتغيرة حسب القيد الذي تنتمي إليه كما يلي:

- القيد الأول: سعر ظله يساوي الصفر:

يتم دراسة حساسية قيمة معامل المتغيرة، مع العلم أن القيد إشارته" أقل من أو يساوي"، كما يلي:

$$\Delta a_{ij}^{*} = \frac{bi\text{قيمة المتغيرة المكملة في العمود}}{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية داخل الأساس}} = \frac{S1\text{قيمة المتغيرة المكملة في العمود}}{x2\text{قيمة المتغيرة الحقيقية}} = \frac{\frac{53}{5}}{\frac{16}{5}} = \frac{53}{16}$$

$$w = a_{12} + \Delta a_{12}^{*} = 1 + \frac{53}{16} = \frac{69}{16}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_2 أقل من أو تساوي 69/16 فإن الحل يبقى أمثلا .

إذن: كلما كانت القيمة بالشكل التالي فإن الحل يبقى أمثلا.

$$a_{12}^{*} \leq \frac{69}{16}$$

- القيد الثاني: سعر ظله يساوي: 6/5

أي تغير في قيمة معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

- القيد الثالث: سعر ظله يساوي -3/10 :

أي تغير في قيمة معامل المتغيرة سيؤثر على الحل الأمثل.

المتغيرة X_3 :

يلاحظ أن المتغيرة الحقيقية X_3 هي متغيرة خارج الأساس .ويتم دراسة حساسية قيمة معامل هذه المتغيرة حسب القيد الذي تنتمي إليه كما يلي:

- القيد الأول: سعر ظله يساوي الصفر:

الحل يبقى أمثلا مهما تغيرت قيمة معامل المتغيرة.

- القيد الثاني: سعر ظله يساوي: 6/5

يتم دراسة حساسية قيمة معامل المتغيرة، مع العلم أن القيد إشارته" أكبر أو يساوي" ، كما يلي:

$$\Delta a_{23}^* = \frac{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية } x3 \text{ في الصف } Cj - Zj}{\text{سعر ظل القيد}} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{7}{6}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_3 أقل من أو تساوي 7/6 فإن الحل يبقى أمثلا .

$$w = a_{23} + \Delta a_{23}^* = 1 + \frac{7}{6} = \frac{13}{6}$$

إذن: كلما كانت القيمة بالشكل التالي فإن الحل يبقى أمثلا.

$$a_{23}^* \leq \frac{13}{6}$$

– القيد الثالث: سعر ظله يساوي 3/10- :

يتم دراسة حساسية معامل المتغيرة كما يلي، مع العلم أن القيد إشارته "يساوي"، ودالة الهدف في حالة التقليل:

$$\Delta a_{33}^* = \frac{\text{قيمة المتغيرة الحقيقية } x3 \text{ في الصف } Cj - Zj}{\text{سعر ظل القيد}} = \frac{\frac{7}{5}}{-\frac{3}{10}} = -\frac{14}{3}$$

وهذا يعني أنه كلما كانت قيمة التغير في معامل المتغيرة X_3 أكبر من أو تساوي 14/6- فإن الحل يبقى أمثلا .

$$w = a_{33} + \Delta a_{33}^* = 2 - \frac{14}{3} = -\frac{8}{3}$$

إذن: كلما كانت القيمة بالشكل التالي فإن الحل يبقى أمثلا.

$$a_{33}^* \geq -\frac{8}{3}$$

4. إضافة متغيرة جديدة:

عند إضافة متغيرة جديدة إلى البرنامج الخطي، فإننا ندرس تأثير هذا التغير على الحل الأمثل من خلال ضرب قيم معاملات عمود المتغيرة الجديدة في مصفوفة المتغيرات المكملة أو الإصطناعية في جدول الحل الأمثل كما يلي:

– في حالة قيد أقل من يساوي: نأخذ قيم معاملات عمود المتغيرة المكملة؛

– في حالة قيد أكبر من أو يساوي: نأخذ إما قيم معاملات عمود المتغيرة المكملة بعد ضربها في 1- ، أو قيم معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية؛

– في حالة قيد يساوي :نأخذ قيم معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية؛

ثم يتم حساب قيمة Cj-Zj (السطر الأخير من جدول السمبلكس)في عمود المتغيرة المضافة، وهنا نكون أمام حالتين:

✓ *قيمة Cj-Zj سالبة*: إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، فإضافة متغيرة جديدة لا يؤثر على الحل الأمثل، أما إذا كانت دالة الهدف في حالة التقليل فهذا يعني أن الحل سيصبح غير أمثل، وبالتالي ينبغي مواصلة الحل؛

✓ *قيمة Cj-Zj موجبة*: إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، فإضافة متغيرة جديدة سيجعل من الحل غير أمثل،وبالتالي ينبغي مواصلة الحل، أما إذا كانت دالة الهدف في حالة التقليل فهذا يعني أن إضافة المتغيرة الجديدة لن يؤثر على الحل الأمثل.

مثال:

ليكن البرنامج الخطي التالي والحل الأمثل المقابل له:

$$Mix\ Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	3	10	0	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
10	x_2	2/7	1	0	-1/7	0	1/7	2
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	-1	6/7	2
Zj		20/7	10	0	-10/7	0	10/7	20
Cj-Zj		1/7	0	0	10/7	M	M-10/7	

المطلوب: ما هو تأثير إضافة متغيرة ثالثة X_3 على الحل الأمثل للبرنامج الخطي؟

$$Mix\ Z = 3x_1 + 10x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 14 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

نضرب قيم معاملات عمود المتغيرة X_3 في مصفوفة المتغيرتين الإصطناعيتين R_1 و R_2 كما يلي:

$$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{7}\\ -1 & \frac{6}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{7}\\ \frac{4}{7}\end{bmatrix}$$

نظيف العمود المتحصل عليه إلى جدول الحل الأمثل ونحسب قيمة Cj-Zj كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	3	10	5	0	0	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	
10	x_2	2/7	1	3/7	0	-1/7	0	1/7	2
0	S_1	-23/7	0	4/7	1	-6/7	-1	6/7	2
Zj		20/7	10	30/7	0	-10/7	0	10/7	20
Cj-Zj		1/7	0	5/7	0	10/7	M	M-10/7	

يلاحظ أن قيمة C_3-Z_3 هي قيمة موجبة (5/7)وبما أن دالة الهدف في حالة التقليل، فإن الحل يبقى أمثل بنفس متغيرات الأساس وقيمها وقيمة دالة الهدف.

إذا إفترضنا أن قيمة معامل المتغيرة المضافة في دالة الهدف هي 4 ، ففي هذه الحالة تكون قيمة C_3-Z_3 هي (-2/7) وبالتالي سيصبح الحل غير أمثل، وفي هذه الحالة ينبغي متابعة الحل حيث تدخل المتغيرة X_3 إلى الأساس في جدول الحل الموالي ويتم الإستمرار في الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل الجديد التالي:

X_1=2/11

X_2=0

X_3=50/11

S_1=0

S_2=0

MinZ= 206/11

5. إضافة قيد جديد:

إذا إفترضنا أننا أضفنا قيدا ثالثا إلى برنامج خطي يتكون من قيدين (تم حله سابقا)، حيث يتشكل لنا البرنامج الخطي الجديد التالي:

Mix Z =$3X_1 + 10X_2$

$$\begin{cases}5X_1 + 6X_2 \geq 10\\ 2X_1 + 7X_2 \geq 14\\ X_1 + 5X_2 \geq 8\\ X_1 , X_2 \geq 0\end{cases}$$

نعوض قيم x_1 و x_2 التي تم الحصول عليها سابقاً عند حل البرنامج الخطي وهي على التوالي 0 و 2 في القيد الثالث المضاف كما يلي:

$$x_1 + 5x_2 \geq 8 \Rightarrow 0+5(2) \geq 8 \Rightarrow 10 \geq 8$$

يلاحظ أن القيد محقق، وبالتالي فنقطة الحل الأمثل لا تتغير.

لنفترض قيدا ثالثا جديدا آخر حيث يصبح البرنامج الخطي الجديد كما يلي:

$$\text{Mix } Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ x_1 + 3x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

نعوض قيم x_1 و x_2 في القيد الثالث المضاف كما يلي:

$$x_1 + 3x_2 \geq 8 \Rightarrow 0+3(2) \geq 8 \Rightarrow 6 \geq 8$$

يلاحظ أن القيد الثالث الجديد في هذه الحالة غير محقق . ولدراسة تأثير هذا القيد الجديد على الحل الأمثل نقوم بما يلي:

يتم تحويل القيد إلى معادلة كما يلي:

$$x_1 + 3x_2 - S_3 + R_3 = 8$$

من جدول الحل الأمثل(قبل إضافة القيد الجديد)نستخرج قيم المتغيرات الحقيقية الأساسية، يلاحظ أن المتغيرة الحقيقية الوحيدة داخل الأساس هي x_2 ، وقيمتها هي كما يلي:

$$2/7x_1 + x_2 + 0S_1 - 1/7S_2 + 0R_1 + 1/7R_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 - 2/7x_1 - 0S_1 + 1/7S_2 - 0R_1 - 1/7R_2$$

الخطوة التالية هي تعويض قيمة x_2 في القيد الثالث الجديد المحول إلى معادلة، تحصل عليها سابقا كما يلي:

$$x_1 + 3(2 - 2/7x_1 - 0S_1 + 1/7S_2 - 0R_1 - 1/7R_2) - S_3 + R_3 = 8$$

ونتحصل على معادلة القيد الثالث الجديد كما يلي:

$$1/7x_1 + 3/7S_2 - S_3 - 3/7R_2 + R_3 = 2$$

نضيف هذا القيد إلى جدول الحل الأمثل مع إدخال المتغيرة الإصطناعية R_3 إلى الأساس .كما ينبغي أيضا إضافة العمودين الخاصين بـS_3 و R_3 وبعد هذه العملية، يلاحظ أن الجدول أصبح غير أمثل، لهذا ينبغي الإستمرار في الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل كما يلي:

C_i^B	X_i^B \ C_j	3	10	0	0	0	M	M	M	R النتيجة	
		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3		
10	x_2	2/7	1	0	-1/7	0	0	1/7	0	2	
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	0	-1	6/7	0	2	
M	R_3	1/7	0	0	3/7	-1	0	-3/7	1	2	14/3
Zj		20/7+M/7	10	0	-10/7+3M/7	-M	0	10/7-3M/7	M	20+2M	
Cj-Zj		1/7-M/7	0	0	10/7-3M/7	M	M	10/7M-10/7	0		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثاني.

- S_2 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **Cj-Zj**) (عمود الإرتكاز)
- R_3 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (3/7) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثاني:</u>

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	3	10	0	0	0	M	M	M	R النتيجة	
		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3		
10	x_2	1/3	1	0	0	-1/3	0	0	1/3	8/3	8
0	S_1	-3	0	1	0	-2	-1	0	2	6	-
0	S_2	1/3	0	0	1	-7/3	0	-1	7/3	14/3	14
Zj		10/3	10	0	0	-10/3	0	0	10/3	80/3	
Cj-Zj		-1/3	0	0	0	10/3	M	M	M-10/3		

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Cj-Zj** بقيت قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثالث.

- X_1 هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **Cj-Zj**) (عمود الإرتكاز)
- X_2 هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (1/3) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثالث:

للمرور للجدول الثالث يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

C_i^B	X_i^B \ C_j	3	10	0	0	0	M	M	M	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	
3	x_1	1	3	0	0	-1	0	0	1	8
0	S_1	0	9	1	0	-5	-1	0	5	30
0	S_2	0	-1	0	1	-2	0	-1	2	2
Zj		3	9	0	0	-3	0	0	3	24
Cj-Zj		0	1	0	0	3	M	M	M-3	

قيم (Cj-Zj) كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق. ومنه:

$x_1=8$

$x_2=0$

$S_1=30$

$S_2=2$

$S_3=0$

$Z=24$

مثال 01:

ليكن البرنامج الخطي التالي والحل الأمثل له:

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 460 \\ x_1 + 2x_3 \leq 420 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

والذي جدول حله الأمثل التالي:

C_i^B	X_i^B \ Cj	20	30	50	0	0	0	R النتيجة
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
30	x_2	1/6	1	0	1/3	0	-1/6	220/3
0	S_2	13/6	0	0	-5/3	1	1/6	280/3
50	x_3	1/2	0	1	0	0	1/2	210
Zj		30	30	50	10	0	20	12700
Zj-Cj		10	0	0	10	0	20	

المطلوب: تحديد مدى أمثلية الحل لمعاملي المتغيرين X_2 X_3 في دالة الهدف على الحل الأمثل للبرنامج الخطي؟

الحل:

1. تحديد مدى الأمثلية معامل X_2 :

المتغيرة X_2 هي متغيرة داخل الأساس .فإذا إفترضنا أن معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير بمقدارΔ ، فما هي القيم التي يجب أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلا ؟

C_i^B	X_i^B \ Cj	20	30+Δ	50	0	0	0	R النتيجة
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
30+Δ	x_2	1/6	1	0	1/3	0	-1/6	220/3
0	S_2	13/6	0	0	-5/3	1	1/6	280/3
50	x_3	1/2	0	1	0	0	1/2	210
Zj		30+Δ/6	30+Δ	50	10+Δ/3	0	20-Δ/6	$12500+\frac{220}{3}\Delta$
Zj-Cj		10+ Δ/6	0	0	10+Δ/3	0	20-Δ/6	

يبقى الجدول السابق أمثلا ، إذا بقيت جميع قيم السطر Zj-Cj أكبر من أو تساوي الصفر ما دامت دالة الهدف في حالة التعظيم . وعلى هذا الأساس يجب أن تبقى قيم الخلايا في السطر Zj-Cj المكتوبة بدلالة Δ كلها أكبر من أو تساوي الصفر، أي أن الخانة Z_6-C_6 ، تبقى الحل أمثلا عندما:

$$20-\Delta/6\geq 0\Rightarrow\Delta\leq 120$$

أي:

$$\Delta\in]-\infty,120]$$

2. تحديد مدى الأمثلية معامل X_3 :

المتغيرة X_3 هي متغيرة داخل الأساس .فإذا إفترضنا أن معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير بمقدارΔ ، فما هي القيم التي يجب أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلا ؟

C_i^B	X_i^B \ C_j	20	30	50+Δ	0	0	0	R النتيجة
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
30	x_2	1/6	1	0	1/3	0	-1/6	220/3
0	S_2	13/6	0	0	-5/3	1	1/6	280/3
50+Δ	x_3	1/2	0	1	0	0	1/2	210
Zj		30+Δ/2	30	50+Δ	10	0	20+Δ/2	12700+210Δ
Zj-Cj		10+ Δ/2	0	0	10	0	20+Δ/2	

يبقى الجدول السابق أمثلا ، إذا بقيت جميع قيم السطر Zj-Cj أكبر من أو تساوي الصفر ما دامت دالة الهدف في حالة التعظيم . وعلى هذا الأساس يجب أن تبقى قيم الخلايا في السطر Zj-Cj المكتوبة بدلالة Δ كلها أكبر من أو تساوي الصفر، أي أن :

$$10+\Delta/2\geq 0\Rightarrow \Delta\geq -20$$

أي: $\Delta\in[-20, +\infty]$

و: $20+\Delta/2\geq 0\Rightarrow \Delta\geq -40$

أي: $\Delta\in[-40, +\infty]$

ومنه: $\Delta\in[-20, +\infty]$

مثال 02:

ليكن البرنامج الخطي التالي والحل الأمثل له:

$$\text{Max } Z = 30x_1 + 20x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 420 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 380 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 240 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

إذا علمت أن جدول الحل الأمثل لهدا البرنامج هو:

C_i^B	X_i^B \ C_j	30	20	0	0	0	R النتيجة
		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
20	x_2	0	1	1/3	0	-1/2	20
0	S_2	0	0	-3/2	1	3/2	30
30	x_1	1	0	-1/6	0	1/2	50
Zj		30	20	5/3	0	5	1900
Zj-Cj		0	0	5/3	0	5	

المطلوب: حدد البرنامج الأمثل لهذا النموذج ، إذا تغير المورد المتاح للقيد الأول بمقدار Δ؟

الحل:

نموذج يصبح بالشكل التالي:

$$\text{Max } Z = 30x_1 + 20x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 420 + \Delta \\ 3x_1 + 6x_2 \le 380 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 240 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

يمكن شرح نتائج الصف الأخير من جدول كما يلي:

أرقام الخانات: Z_1-C_1، Z_2-C_2، Z_4-C_4 كلها مساوية للصفر وهي نتيجة لإدخال وظهور المتغيرات S_2 X_2 X_1 في الحل النهائي أي في العمود X^B_i ولذلك يجب أن تكون قيمتها دائما مساويا للصفر في السطر الأخير. وتبدو أهمية قيمة أرقام هذه الخانات عندما تكون هناك متغيرات أصلية X_i غير موجودة في الحل النهائي حيث يمكن معرفة آثار إدخال تلك المتغيرات إلى الحل النهائي على الأرباح وعلى البرنامج الإنتاجي.

– أما أرقام الخانات: Z_3-C_3، Z_5-C_5، فهي تقيس تكلفة قيود الاقسام والتي يمكن شرحها كما يلي:

أولا/ إن تغير في الطرف الأيمن من القيد الأول (المتعلق بالقسم الأول) والممثل بالمتغير S_1 (متغير الطاقات الغير المستغلة) تبلغ تكلفة هذا القيد 5/3 أي أنه عند إضافة ساعة واحدة فقط للقسم الاول ، فإن الربح سوف يزداد بمقدار الربح الحدي (سعر الظل) والمقدر بـ : 5/3 دج. فمثلا زيادة طاقة القسم الأول من 420 ساعة إلى 421 ساعة فإن الحل الأمثل سوف يعطينا برنامجا إنتاجيا مختلفا:

$x_1 = 50 - 1/6 = 49{,}83$ Unité, $x_2 = 20 + 1/3 = 20{,}33$ Unité

Max Z =30(49,83) + 20(20,33) =1901,66 (زيادة قدرها : 1,66 دج أو 3/5دج)

وللإجابة على السؤال هناك طرق عديدة يمكن إتباعها لتحديد هذا المجال وأبرزها الجانب الرياضي وهو كما يلي:

القيد الأول: S_1:

$20+1/3\Delta\geq 0 \Rightarrow \Delta\geq -60$

$30-3/2\Delta\geq 0 \Rightarrow \Delta\leq 20$

$50-1/6\Delta\geq 0 \Rightarrow \Delta\leq 300$

ومنه: $-60\leq\Delta\leq 20$

أي تتغير كمية المورد الأول للقسم الأول ضمن مجال [420+20،420-60] أي: [440،360]

مثال 03:

ليكن البرنامج الخطي التالي والحل الأمثل له:

$$\text{Max } Z = 300x_1 + 500x_2 + 400x_3$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 10x_2 + 8x_3 \leq 1800 \\ 15x_1 + 15x_2 + x_3 \leq 1800 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1800 \\ x_1 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

إذا علمت أن جدول الحل الأمثل لهدا البرنامج هو:

C_i^B	X_i^B \ C_j	300	500	400	0	0	0	0	R النتيجة
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1	0	-2	0	1	-4/5	0	0	360
400	x_3	0	3/2	1	0	1/10	0	3/2	165
0	S_3	0	1	0	0	-1/5	1	0	540
300	x_1	1	0	0	0	0	0	-1	10
Zj		300	600	400	0	40	0	300	69000
Zj-Cj		0	100	0	0	40	0	300	

المطلوب: حدد البرنامج الأمثل لهذا النموذج ، إذا تغير المورد المتاح للقيد الثاني بمقدار Δ؟

الحل:

نموذج يصبح بالشكل التالي:

$$Max\ Z = 300x_1 + 500x_2 + 400x_3$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 10x_2 + 8x_3 \leq 1800 \\ 15x_1 + 15x_2 + x_3 \leq 1800 + \Delta \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1800 \\ x_1 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

– أما أرقام الخانة: Z_5-C_5، فهي تقيس تكلفة قيود الأقسام والتي يمكن شرحها كما يلي:

أولا/ إن تغير في الطرف الأيمن من القيد الثاني (المتعلق بالقسم الثاني) والممثل بالمتغير S_2 (متغير الطاقات الغير المستغلة) تبلغ تكلفة هذا القيد 40 أي أنه عند إضافة ساعة واحدة فقط للقسم الأول ، فإن الربح سوف يزداد بمقدار الربح الحدي (سعر الظل) والمقدر بـ : 40 دج. فمثلا زيادة طاقة القسم الثاني من 1800 ساعة إلى 1801 ساعة فإن الحل الأمثل سوف يعطينا برنامجا إنتاجيا مختلفا:

$x_1 = 10$ تبقى ثابتة

$x_3 = 165 + 1/10\Delta$

$S_1 = 360 - 4/5\Delta$

$S_3 = 540 - 1/5\Delta$

$Max\ Z = 300(10) + 500(0) + 400(165{,}1) = 69040$ DA (زيادة قدرها : 40 دج)

وللإجابة على السؤال هناك طرق عديدة يمكن إتباعها لتحديد هذا المجال وأبرزها الجانب الرياضي وهو كما يلي:

القيد الثاني: S_2:

$165 + 1/10\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -1650$

$360 - 4/5\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 450$

$540 - 1/5\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 2700$

أي تتغير كمية المورد الثاني للقسم الثاني ضمن مجال [450،-1650] . حتى لا يتغير الحل الأمثل.