# الفصل الثالث: المسائل الثنائية في البرمجة الخطية

***Binary problems in linear programming***

1. المدلول الإقتصادي للثنائية.
2. أهمية تحويل النموذج الأولي إلى النموذج الثنائي.
3. الخطوات الأساسية لتحويل النموذج الأولي إلى نموذج ثنائي.

# الفصل الثالث: المسائل الثنائية في البرمجة الخطية
# *Binary problems in linear programming*

في هذا الفصل سوف نتطرق إلى المسائل الثنائية (النموذج المقابل أو البرنامج الثنائي) في البرمجة الخطية . يعتمد هذا النموذج على معكوس المصفوفة قيد الدراسة أي: هناك نموذجان الأول يطلق عليه بالنموذج الأولي (الأصلي) والذي يتم صياغته من خلال المشكلة المطروحة في المسألة، والثاني عبارة عن مشكلة مناظرة للمشكلة الأولى ويطلق عليها بالنموذج الثنائي أو المقابل والذي يتم الحصول عليه بتحويل النموذج الأولي.**(Subhendu, 2014, p. 30)**

أي أن كل مشكلة للتدنية في البرمجة الخطية تقابلها مشكلة تعظيم وكل مشكلة تعظيم تقابلها مشكلة تدنية (تخفيض). وتسمى المشكلة الأولية بالمشكلة الأصلية والمشكلة المناظرة لها تسمى بالمشكلة الثنائية. والعلاقة بين المشكلتين من السهل رؤيتها بدلالة المعاملات التي تسهم بشكل عام. **(دولينج، 2003، صفحة 239)**

## 1. المدلول الإقتصادي للثنائية:

– يعطي حل المسألة الثنائية قيما لكل مورد من الموارد المستخدمة في النموذج الأصلي فوق سعر تلك الموارد الأصلية ، حيث أن أعظم ربح سيتم تحقيقه سيتم توزيعه على عناصر المدخلات التي تشارك في تحقيقه، وبتعبير آخر فإن y هو مقدار الربح الحدي الذي تحققه وحدة إضافية من المدخل (المورد) وتضيفه للربح ، وهذا ما يطلق عليه **(سعر الظل)** ، حيث لا يمكن رؤيته بصورة مباشرة إنما هو إنعكاس لقدرة المؤسسة على الحصول على موارد إضافية وإنتاج وحدات من المنتوج تعطي ربحا إضافيا (لأن الأرباح في النموذج متعلقة بوحدة المنتوج وليس بوحدة من موارد المستخدمة)؛

– إن القيمة العظمى لـ :Z تساوي بالضبط القيمة الصغرى لـ :W ، وهذا يعني أنه إذا وجد الحل الأمثل لكل من البرنامج الأصلي والبرنامج الثنائي فإننا نكون قد خصصنا الربح الكلي الذي ستحققه المؤسسة على الموارد الإقتصادية التي تستخدم في إنتاج هذا الربح؛

– توضح قيمة المتغيرات y في الحل الأمثل للبرنامج الثنائي ، الربح الحدي لكل مورد من موارد الإنتاج ، بمعنى أنها تحدد للمسير المقدار الذي يمكن به زيادة الأرباح المؤسسة الكلية إذا إستطاع زيادة الكمية المتاحة من كل مورد من موارد الإنتاج بوحدة واحدة؛

– إن الموارد المستخدمة بالكامل هي التي سيكون لها قيمة حدية في البرنامج الثنائي . ويعني ذلك أن موارد الإنتاج وفيرة العرض والتي لم تستغل بالكامل سوف تأخذ قيمة حدية ، أي ربحها الحدي يساوي صفر.

**2. أهمية تحويل النموذج الأولي إلى النموذج الثنائي :**

– الحصول على نموذج يحتوي على عدد أقل من القيود، وبذلك سوف يختصر العمل الحسابي لجداول السمبلكس والوصول إلى الحل الأمثل، والحصول على نفس الحل الأمثل سواءا كان الحل للنموذج الأولي أو الحل للنموذج الثنائي.

– للتخلص من الإشارة السالبة في الجانب الأيمن ( إن وجدت )أي عندما تكون المصادر ذات كميات سالبة وهو أهم ما يمكن الحصول عليه في حالة التحويل إلى النموذج الثنائي.

– لغرض التعرف على أبعاد المشكلة الثنائية، فإذا كان النموذج الأولي بصيغة التعظيم أي المشكلة بالصيغة الربحية، فبإمكاننا التعرف على النموذج الثنائي ويكون بصيغة التصغير وتمثيله للجانب (التكلفة) لنفس المشكلة المعبر عنها بالصيغة الأولية.

– يساعد حل النموذج المقابل على إجراء تحليل ما بعد الأمثلية والتوصل إلى حلول بطريقة مختصرة في حالة إجراء تغييرات في معاملات المتغيرات الأساسية في تلك المشكلة أو إضافة قيود جديدة للمشكلة.

– تساعد الإدارة في معرفة قيمة البدائل الأخرى للقرار. **(حمادي، 2018، صفحة 89)**

**3. الخطوات الأساسية لتحويل النموذج الأولي إلى نموذج ثنائي:**

هو عملية عكس النموذج الأولي بكل محتوياته، ولأي مشكلة برمجية يرتبط معها نموذج برمجي مقابل له.

**الجدول 01:** الخطوات الأساسية لتحويل النموذج الأولي إلى نموذج ثنائي.

| | النموذج الأولي | النموذج الثنائي المقابل له |
|---|---|---|
| 1 | Max | Min |
| 2 | Min | Max |
| 3 | Z | W |
| 4 | x | y |
| 5 | ثوابت | المعاملات |
| 6 | المعاملات | ثوابت |
| 7 | $\leq$ | $\geq$ |
| 8 | $\geq$ | $\leq$ |
| 9 | مصفوفة المعاملات :<br>– الصفوف<br>– الأعمدة | منقول مصفوفة المعاملات:<br>– الصف يصبح عمود<br>– والعمود يصبح صف |
| 10 | شرط عدم السلبية | شرط عدم السلبية |

**المصدر:** رند الأسطل. (2016). **بحوث العمليات والأساليب الكمية في صنع القرارات الإدارية.** الطبعة السادسة. جامعة فلسطين. فلسطين. ص.224.

**مثال 01:**

ليكن لدينا البرنامج الأولي التالي:

$$\text{Max } Z = 30x_1 + 60x_2 + 90x_3$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 100 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب:** إيجاد البرنامج الثنائي (المسألة الثنائية) لهذا البرنامج الخطي؟

**الحل:**

يكون الشكل الثنائي كما يلي:

$$\text{Min } W = 100y_1 + 200y_2$$

$$\begin{cases} 10y_1 + y_2 \geq 30 \\ 6y_1 + 3y_2 \geq 60 \\ 3y_1 + 6y_2 \geq 90 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن عدد المتغيرات في البرنامج الثنائي يساوي عدد القيود في البرنامج الأولي، وعدد القيود في البرنامج الثنائي يساوي عدد المتغيرات في البرنامج الأولي.

**مثال 02:**

ليكن لدينا البرنامج الأولي التالي:

$$\text{Max } Z = 56x_1 + 49x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 32 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب:** إيجاد البرنامج الثنائي (المسألة الثنائية) لهذا البرنامج الخطي؟

**الحل:**

يكون الشكل الثنائي كما يلي:

$$\text{Min } W = 24y_1 + 15y_2 + 32y_3$$

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 + 8y_3 \geq 56 \\ 6y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 49 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

**مثال 03:**

ليكن لدينا البرنامج الأولي التالي:

$$\text{Min } W = 14y_1 + 40y_2 + 18y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 + y_3 \geq 50 \\ y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq 30 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب:** إيجاد البرنامج الثنائي (المسألة الثنائية) لهذا البرنامج الخطي؟

**الحل:**

يكون الشكل الثنائي كما يلي:

$$\text{Max } Z = 50x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**مثال 04:**

ليكن لدينا البرنامج الأولي التالي:

$$\text{Min } W = 16y_1 + 20y_2 + 30y_3$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5 \\ y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب:** إيجاد البرنامج الثنائي (المسألة الثنائية) لهذا البرنامج الخطي؟

**الحل:**

يكون الشكل الثنائي كما يلي:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**مثال 05:**

ليكن لدينا البرنامج الأولي التالي:

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 460 \\ x_1 + 2x_3 \leq 420 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب:**

1) إيجاد البرنامج الثنائي (المسألة الثنائية) لهذا البرنامج الخطي؟
2) إستنتج الحل الأمثل للمسألة الثنائية؟

**الحل:**

1) يكون الشكل الثنائي كما يلي:

$$\text{Min } W = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 20 \\ 3y_1 + 5y_2 \geq 30 \\ y_1 + 2y_3 \geq 50 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

2) إستنتاج الحل الأمثل للمسألة الثنائية:

**أولا/ إيجاد الحل الأمثل للمسألة الأولية:**

تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات إصطناعية:

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + S_1 = 430 \\ 3x_1 + 5x_2 + S_2 = 460 \\ x_1 + 2x_3 + S_3 = 420 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي:

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 20 | 30 | 50 | 0 | 0 | 0 | R النتيجة | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| 0 | $S_1$ | 1 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 430 | 430/1=430 |
| 0 | $S_2$ | 3 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 460 | 460/0=∞ |
| 0 | $S_3$ | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 420 | 420/2=210 |
| Zj | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Zj-Cj | | -20 | -30 | -50 | 0 | 0 | 0 | | |

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثاني.

- $x_3$ هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **Zj-Cj**) (عمود الإرتكاز)
- $S_3$ هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (2) (نقطة الإرتكاز)

الجدول الثاني:

للمرور للجدول الثاني يجب حساب عناصر الجدول الأول كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 20 | 30 | 50 | 0 | 0 | 0 | R | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | النتيجة | |
| 0 | $S_1$ | 1/2 | 3 | 0 | 1 | 0 | -1/2 | 220 | 220/3=73,33 |
| 0 | $S_2$ | 3 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 460 | 460/5=92 |
| 50 | $x_3$ | 1/2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 210 | 210/0=∞ |
| Zj | | 25 | 0 | 50 | 0 | 0 | 25 | 10500 | |
| Zj-Cj | | 5 | -30 | 0 | 0 | 0 | 25 | | |

شرط الأمثلية غير محقق (لأن قيمة **Zj-Cj** قيمة سالبة)، ننتقل إلى الجدول الثالث.

- $X_2$ هو المتغير الداخل (أقل قيمة سالبة لـ **Zj-Cj**) (عمود الإرتكاز)
- $S_1$ هو المتغير الخارج (أقل قيمة موجبة) (صف الإرتكاز)
- العدد (3) (نقطة الإرتكاز)

<u>الجدول الثالث:</u>

للمرور للجدول الثالث يجب حساب عناصر الجدول الثاني كما يلي:

- عناصر صف الارتكاز في الجدول السابق تقسم على نقطة الإرتكاز.
- أما باقي العناصر تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

| $C_i^B$ | $X_i^B$ \ $C_j$ | 20 | 30 | 50 | 0 | 0 | 0 | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | النتيجة |
| 30 | $x_2$ | 1/6 | 1 | 0 | 1/3 | 0 | -1/6 | 220/3 |
| 0 | $S_2$ | 13/6 | 0 | 0 | -5/3 | 1 | 5/3 | 280/3 |
| 50 | $x_3$ | 1/2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 210 |
| Zj | | 30 | 30 | 50 | 10 | 0 | 20 | 12700 |
| Zj-Cj | | 10 | 0 | 0 | 10 | 0 | 20 | |

قيم (Zj-Cj)كلها موجبة ، إذن شرط الأمثلية محقق.

نعلم أن القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة في المسألة الأولية والتي تظهر في السطر الأخير تساوي قيم المتغيرات الرئيسية بنفس الترتيب للمسألة الثنائية ، ومنه:

- القيمة المقابلة لمتغير الفجوة $S_1$ في المسألة الأولية هي(10 ) وعليه قيمة المتغير الرئيسي $y_1$ في المسألة الثنائية تساوي $y_1=10$ .
- القيمة المقابلة لمتغير الفجوة $S_2$ في المسألة الأولية هي(0) وعليه قيمة المتغير الرئيسي $y_2$ في المسألة الثنائية تساوي $y_2=0$ .
- القيمة المقابلة لمتغير الفجوة $S_3$ في المسألة الأولية هي(20) وعليه قيمة المتغير الرئيسي $y_3$ في المسألة الثنائية تساوي $y_3=20$ .
- قيمة دالة الهدف في الحل الأمثل للمسألتين تكون متساوية، ومنه قيمة دالة الهدف للمسألة . الثنائية تساوي $W = 12700$

وعليه الحل الأمثل للمسألة الثنائية هو:

$y_1=10.$

$y_2=0.$

$y_3=20.$

$W = 12700$