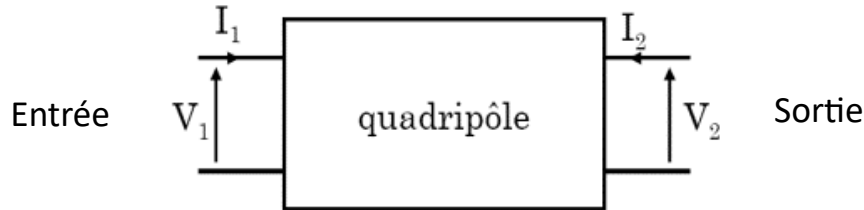


2-1- Représentation d'un réseau passif par un quadripôle

2-1-1-Définition

Un quadripôle est par définition un circuit électrique qui comporte quatre bornes : deux pour le circuit d'entrée (généralement la source) et deux pour la sortie (généralement la charge).

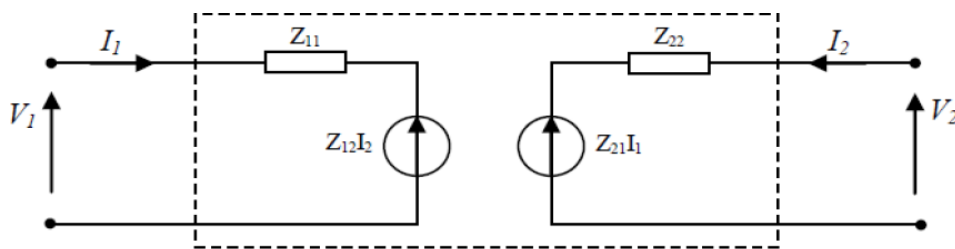
Le quadripôle passif ne doit comporter des sources indépendantes de tensions ou des sources indépendantes de courants. Le quadripôle passif comporte des éléments linéaires comme la résistance, le condensateur et la bobine.



2-1-2- Représentation matricielle d'un quadripôle

a) Matrice impédance [Z]:

Le schéma de ce quadripôle équivalent est donné ci-dessous.



Les équations caractéristiques de ce quadripôle peuvent se mettre sous la forme:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

ou encore sous forme matricielle:

$$[V] = [Z][I]$$

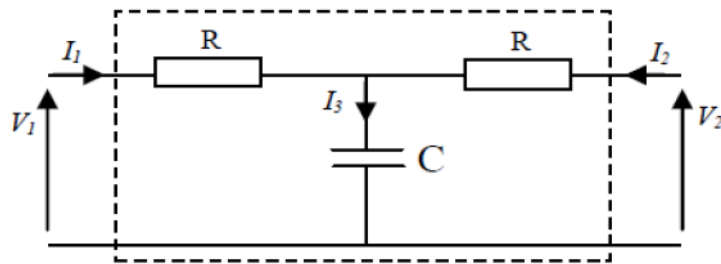
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

[Z] est la matrice impédance du quadripôle. Les éléments de cette matrice s'appellent les paramètres Z en circuit ouvert ($I_1=0$ ou $I_2=0$). Ils se définissent comme suit:

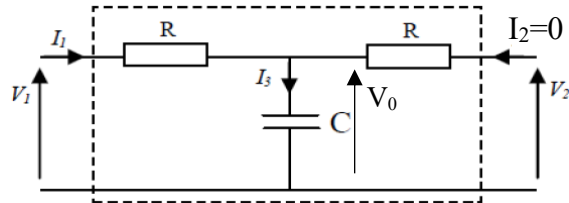
- Impédance d'entree: $Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$
- Impédance de transfert inverse: $Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$
- Impédance de transfert direct: $Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$
- Impédance de sortie: $Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$

Exemple :

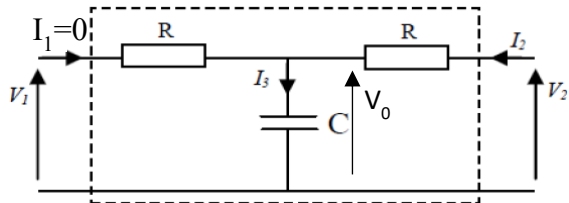
Trouver les paramètres Z du circuit suivant.



$$\begin{aligned}
 I_2 = 0 &\Rightarrow I_3 = I_1 \\
 \Rightarrow V_1 &= (R + Z_C)I_1 \\
 \Rightarrow Z_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = R + Z_C \\
 V_2 &= V_0 - RI_2 = V_0 \\
 V_2 = V_0 = Z_C I_1 &\Rightarrow Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_C
 \end{aligned}$$

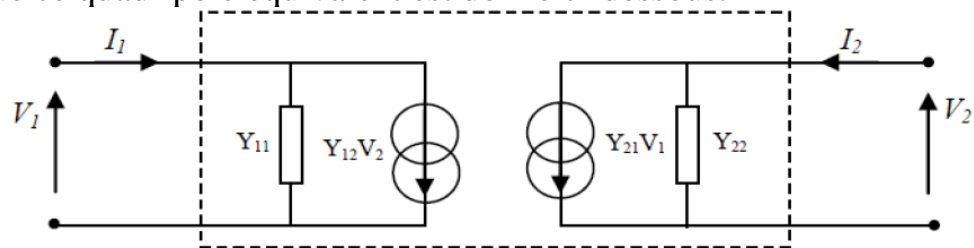


$$\begin{aligned}
 I_1 = 0 &\Rightarrow I_3 = I_2 \\
 \Rightarrow V_2 &= (R + Z_C)I_2 \\
 \Rightarrow Z_{22} &= \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = R + Z_C \\
 V_1 &= V_0 - RI_1 = V_0 \\
 V_1 = V_0 = Z_C I_2 &\Rightarrow Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_C
 \end{aligned}$$



b) Matrice admittance [Y]:

Le schéma de ce quadripôle équivalent est donné ci-dessous.



Les équations caractéristiques de ce quadripôle peuvent se mettre sous la forme:

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2$$

ou encore sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

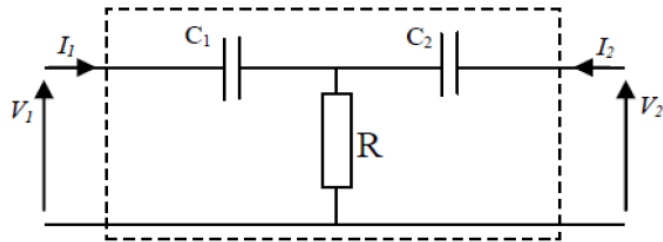
[Y] est la matrice admittance du quadripôle. Les éléments de cette matrice s'appellent les paramètres Y en court-circuit ($V_1=0$ ou $V_2=0$). Ils se définissent comme suit:

- Admittance d'entree: $Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$

- Admittance de transfert inverse: $Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$
- Admittance de transfert direct: $Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$
- Admittance de sortie: $Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$

Exemple :

Trouver les paramètres Y du filtre passe-haut suivant.



- Admittance d'entrée: $Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$

Si la sortie est en court-circuit ($V_2=0$), alors: C_2 et R sont en parallèle et leur impédance équivalente est en série avec C_1 . La loi d'Ohm permet d'écrire:

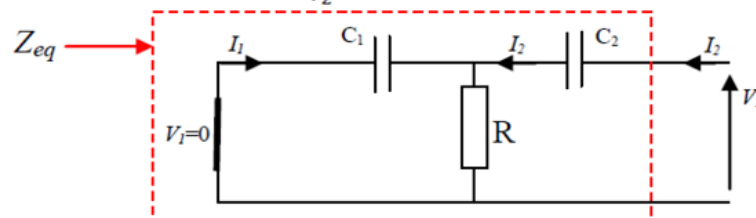
$$V_1 = (Z_{C1} + (R // Z_{C2})) I_1 \Rightarrow Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{1}{(Z_{C1} + (R // Z_{C2}))}$$

- Admittance de sortie: $Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$

Si l'entrée est en court-circuit ($V_1=0$), alors: C_1 et R sont en parallèle et leur impédance équivalente est en série avec C_2 . La loi d'Ohm permet d'écrire:

$$V_2 = (Z_{C2} + (R // Z_{C1})) I_2 \Rightarrow Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{(Z_{C2} + (R // Z_{C1}))}$$

- Admittance de transfert inverse: $Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$



Dans ce cas, C_1 est en parallèle avec R , ce qui permet d'appliquer le théorème du pont diviseur de courant:

$$I_1 = -\frac{Y_{C1}}{Y_{C1} + Y_R} I_2 = -\frac{\frac{1}{Z_{C1}}}{\frac{1}{Z_{C1}} + \frac{1}{R}} I_2,$$

La relation qui relie la tension V_2 au courant I_2 est donnée par la loi d'Ohm:

$$V_2 = Z_{eq} I_2 ,$$

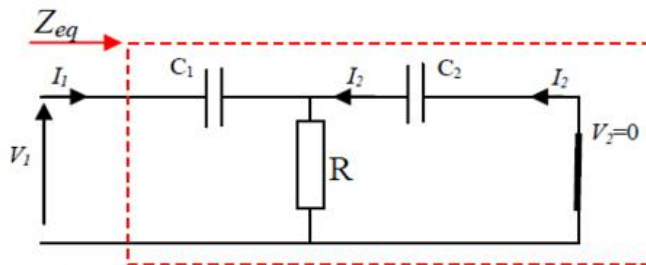
$$\text{avec: } Z_{eq} = Z_{C2} + (Z_{C1} // R), \quad Z_{C1} = \frac{1}{j\omega C_1}, \quad Z_{C2} = \frac{1}{j\omega C_2}$$

On obtient alors:

$$I_1 = -\frac{Y_{C1}}{Y_{C1} + Y_R} \frac{V_2}{Z_{eq}} = -\frac{\frac{1}{Z_{C1}}}{\frac{1}{Z_{C1}} + \frac{1}{R}} \frac{1}{Z_{C2} + (Z_{C1} // R)} V_2$$

$$\Rightarrow Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = -\frac{\frac{1}{Z_{C1}}}{\frac{1}{Z_{C1}} + \frac{1}{R}} \cdot \frac{1}{Z_{C2} + (Z_{C1} // R)}$$

• Admittance de transfert direct: $Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} |_{V_2=0}$



Dans ce cas, C_2 est en parallèle avec R , ce qui permet d'appliquer le théorème du pont diviseur de courant:

$$I_2 = -\frac{Y_{C2}}{Y_{C2} + Y_R} I_1 = -\frac{\frac{1}{Z_{C2}}}{\frac{1}{Z_{C2}} + \frac{1}{R}} I_1 ,$$

$$\text{avec: } Y_{C2} = j\omega C_2, \quad Y_R = \frac{1}{R}$$

La relation qui relie la tension V_1 au courant I_1 est donnée par la loi d'Ohm:

$$V_1 = Z_{eq} I_1 ,$$

$$\text{avec: } Z_{eq} = Z_{C1} + (Z_{C2} // R), \quad Z_{C1} = \frac{1}{j\omega C_1}, \quad Z_{C2} = \frac{1}{j\omega C_2}$$

On obtient alors:

$$I_2 = -\frac{Y_{C2}}{Y_{C2} + Y_R} \frac{V_1}{Z_{eq}} = -\frac{\frac{1}{Z_{C2}}}{\frac{1}{Z_{C2}} + \frac{1}{R}} \frac{1}{Z_{C1} + (Z_{C2} // R)} V_1$$

$$\Rightarrow Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = -\frac{\frac{1}{Z_{C2}}}{\frac{1}{Z_{C2}} + \frac{1}{R}} \cdot \frac{1}{Z_{C1} + (Z_{C2} // R)}$$

c) Matrice [h] des paramètres hybrides:

Dans ce cas, nous exprimons V_1 et I_2 en fonction de I_1 et V_2 ce qui donne:

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

ou encore sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [h] \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

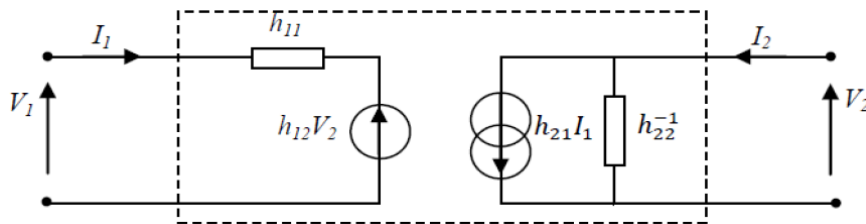
h_{11} , h_{12} , h_{21} et h_{22} sont les paramètres hybrides de la matrice hybride [h], avec:

Impédance d'entrée: $h_{11} = \frac{V_1}{I_1} |_{V_2=0}$

Rapport de transfert inverse: $h_{12} = \frac{V_1}{V_2} |_{I_1=0}$

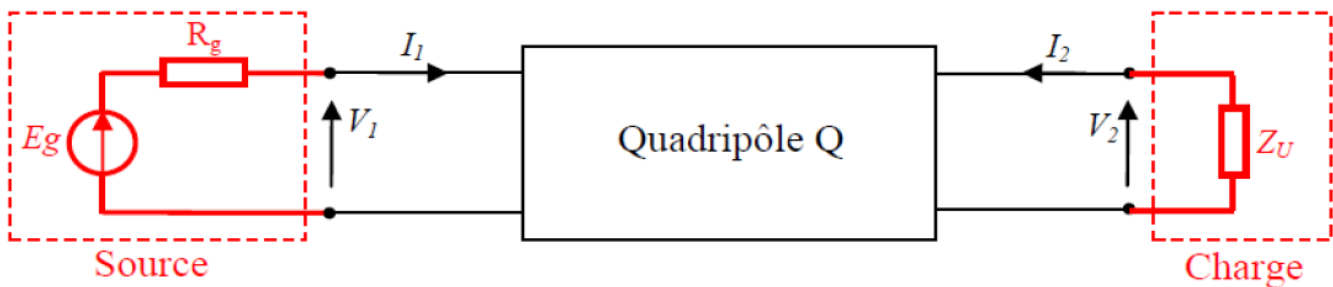
L'amplification en courant: $h_{21} = \frac{I_2}{I_1} |_{V_2=0}$

Admittance de sortie: $h_{22} = \frac{I_2}{V_2} |_{I_1=0}$



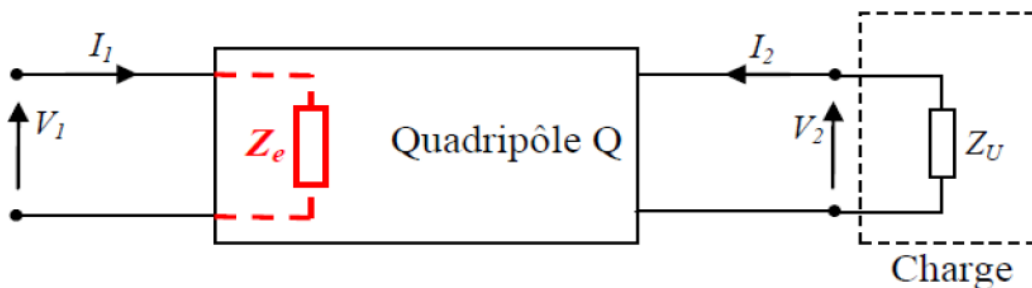
2-2- Grandeurs caractérisant le comportement d'un quadripôle dans un montage

Pour caractériser un quadripôle, on connecte un dipôle source (E_g , R_g) aux deux bornes d'entrée. Aux deux bornes de sortie, nous branchons un dipôle de charge noté Z_U .



2-2-1- Impédance d'entrée

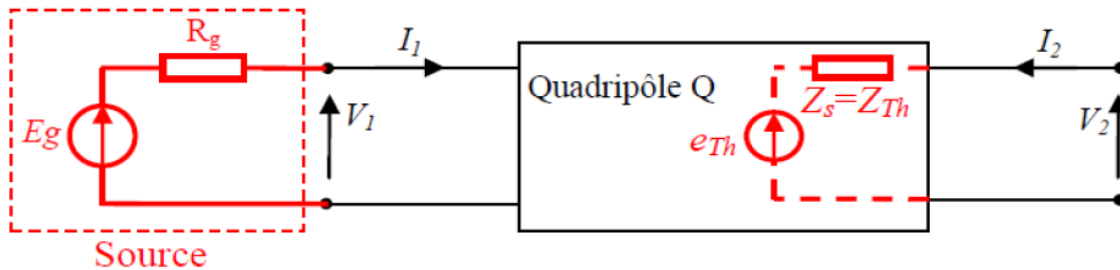
L'impédance d'entrée est l'impédance « vue » par la source qui attaque le quadripôle à vide ou en charge.



L'impédance d'entrée est donnée par: $Z_e = \frac{V_1}{I_1}$.

2-2-2- Impédance de sortie

Vis-à-vis de la charge, le quadripôle se comporte comme un dipôle équivalent au générateur de Thévenin.



L'impédance de sortie est donnée par: $Z_s = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{E_g=0}$

2-2-3- gain en tension et en courant.

Le gain en tension est défini par le rapport de la tension de sortie V_2 du quadripôle par la tension d'entrée:

$$G_V = \frac{V_2}{V_1}$$

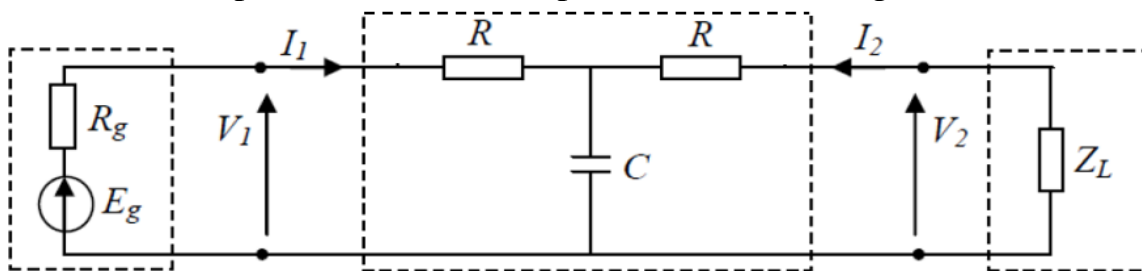
Le gain en courant est défini par le rapport du courant de sortie I_2 du quadripôle par le courant d'entrée:

$$G_I = \frac{I_2}{I_1}$$

Exemple:

Soit le quadripôle passif ci-dessous attaqué par le générateur E_g de résistance interne R_g et chargé en sortie par la charge Z_L .

Déterminer l'impédance d'entrée, l'impédance de sortie, le gain en tension et le gain en courant.

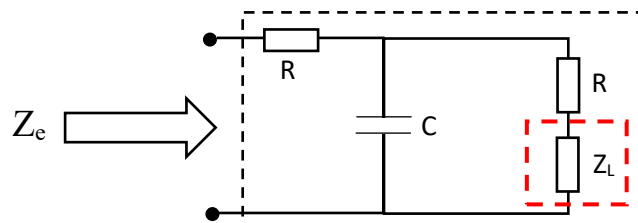


- L'impédance d'entrée Z_e :

L'impédance d'entrée Z_e est l'impédance vue par la source (E_g et sa résistance interne R_g) soit en charge (Z_L branchée) ou à vide (Z_L débranchée): $Z_e = \frac{V_1}{I_1}$

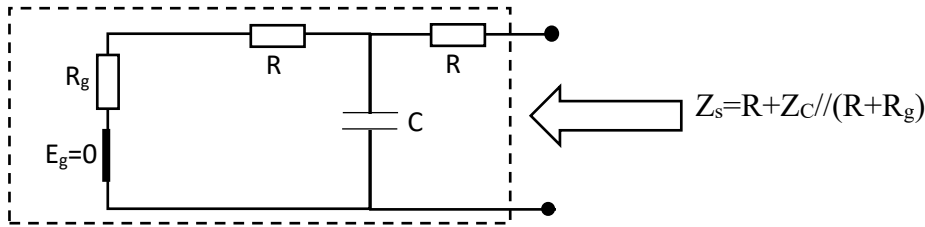
Z_e en charge: $Z_e = R + Z_C // (R + Z_L)$

Z_e à vide: $Z_e = R + Z_C$



- **L'impédance de sortie Z_s :**

L'impédance de sortie Z_s est l'impédance vue par la charge Z_L tout en passivant les sources indépendantes (dans ce cas: $E_g=0$) : $Z_s = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{E_g=0}$



- **Gain en tension à vide et en charge :**

Le gain en tension est le rapport entre la tension de sortie V_2 et la tension d'entrée V_1 :

$$G_V = V_2 / V_1.$$

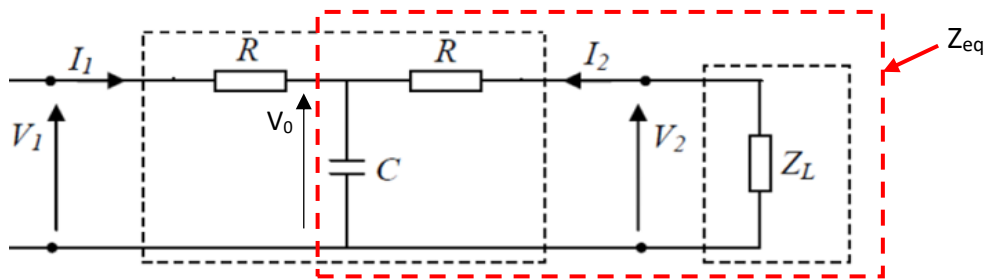
R est en série avec Z_L : $V_2 = \frac{Z_L}{Z_L + R} V_0$ (1)

Z_{eq} est en série avec R: $V_0 = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R} V_1$ (2)

(1) et (2) donnent : $G_V = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{Z_L}{Z_L + R}}{\frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R}}$ c'est le gain en tension en charge.

Pour déterminer le gain en tension à vide G_{V0} il suffit de débrancher Z_L ($Z_L \rightarrow \infty$):

$$G_{V0} = \frac{V_2}{V_1} \Big|_{Z_L \rightarrow \infty} = \frac{Z_C}{Z_C + R}$$



- **Gain en courant :**

Le gain en courant est le rapport entre le courant traversant la charge et le courant d'entrée délivré par la source : $G_I = I_2 / I_1$.

En appliquant le pont diviseur de courant : $I_2 = \frac{1}{\frac{1}{R+Z_L} + \frac{1}{Z_C}} I_1$

Alors: $G_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{1}{R+Z_L}}{\frac{1}{R+Z_L} + \frac{1}{Z_C}} = \frac{Z_C}{Z_C + R + Z_L}$

2-4- Filtres passifs

2-4-1-Définition

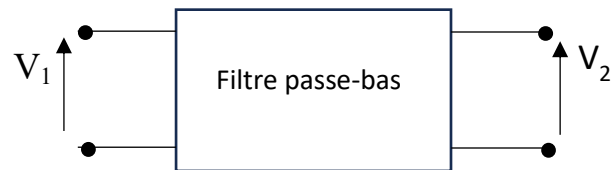
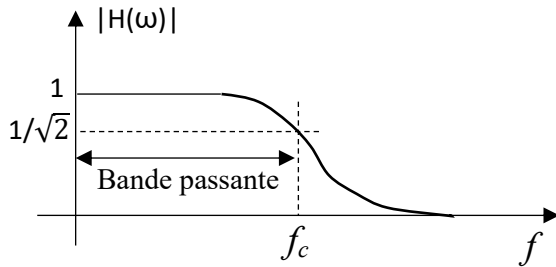
Un filtre est un quadripôle qui permet d'atténuer ou laisser passer des signaux de certaines fréquences voulues.

Les filtres passifs sont constitués uniquement de dipôles linéaires passifs (R , L et C).

2-4-2- Principaux types de filtres

a) Filtre passe-bas

Un filtre passe-bas laisse passer toutes les fréquences entre la fréquence nulle et la fréquence de coupure f_c et atténue toutes les fréquences supérieures à celle-ci.



$H(\omega)$ est la fonction de transfert ou la réponse en fréquence du filtre : $H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = |H(\omega)|e^{j\varphi}$.

$|H(\omega)|$ est le module de la fonction de transfert.

φ est l'angle (la phase) de la fonction de transfert c'est-à-dire le déphasage entre la sortie V_2 et l'entrée V_1 .

La forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

H_0 est l'amplitude de la fonction de transfert à $\omega \rightarrow 0$.

$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ est la fréquence de coupure.

La fréquence de coupure est la fréquence pour laquelle : $|H(\omega)| = \frac{|H(\omega)|_{\omega \rightarrow 0}}{\sqrt{2}}$

Exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre

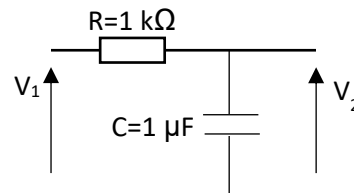
Le filtre passe-bas du premier ordre peut être réalisé par un simple circuit RC.

$$V_2 = \frac{Z_C}{Z_C + R} V_1$$

$$H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_C}{Z_C + R} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$\text{avec: } H_0 = 1 \text{ et } f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$\text{A.N.: } f_c = \frac{1}{2\pi \times 10^3 \times 10^{-6}} = 159.15 \text{ Hz}$$



Diagrammes de Bode :

- Le gain en décibels : $H_{dB}(\omega) = 20 \text{ Log}(|H(\omega)|) = 20 \text{ Log}\left(\frac{H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\right) = -10 \text{ Log}\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$

$$H_{dB}(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_c \\ -3 & \omega = \omega_c \\ -\infty & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

La pente se calcule entre $\omega_1 \gg \omega_c$ et $\omega_2 = 10\omega_1$:

$$H_{dB}(\omega_1 \gg \omega_c) \approx -20 \text{ Log}\left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)$$

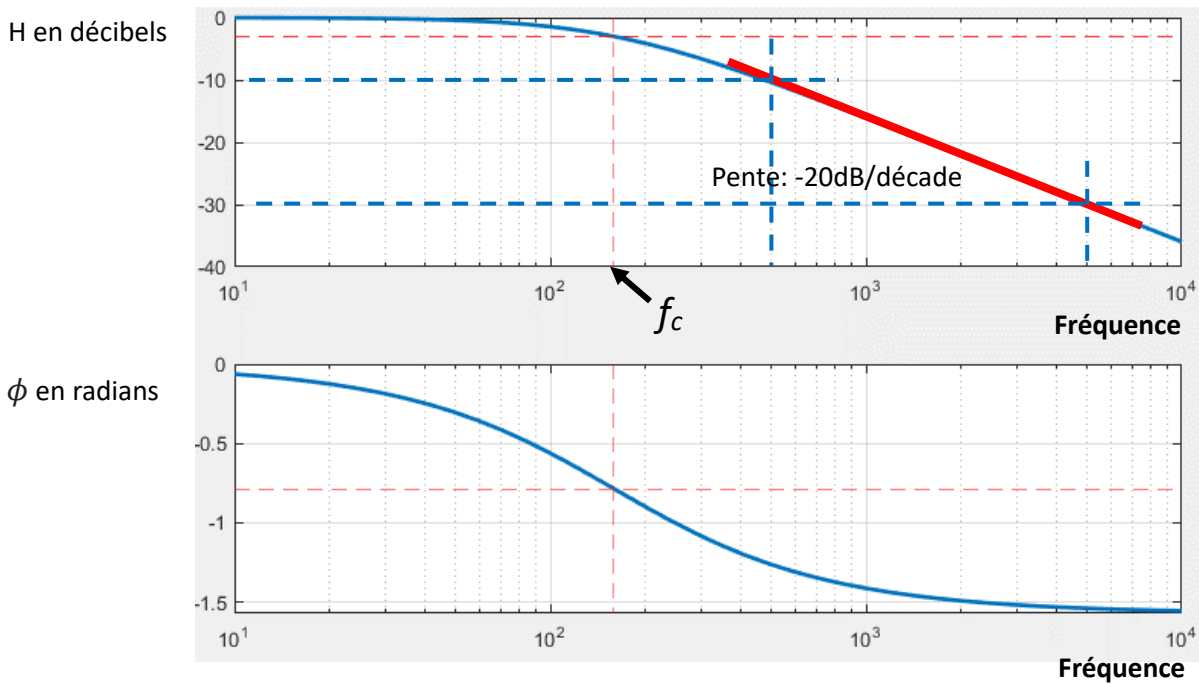
$$H_{dB}(\omega_2 = 10 \omega_1 \gg \omega_c) \approx -20 \text{ Log}\left(\frac{10 \omega_1}{\omega_c}\right)$$

$$\text{Pente} = H_{dB}(\omega_2 = 10 \omega_1) - H_{dB}(\omega_1) = -20 \text{ dB/décade}$$

- La phase en radians : $\phi(\omega) = \arctan(H_0) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

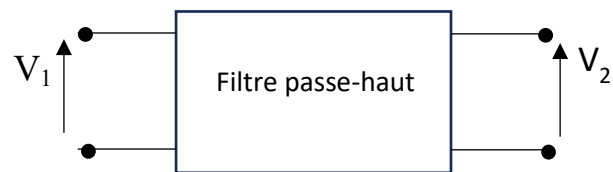
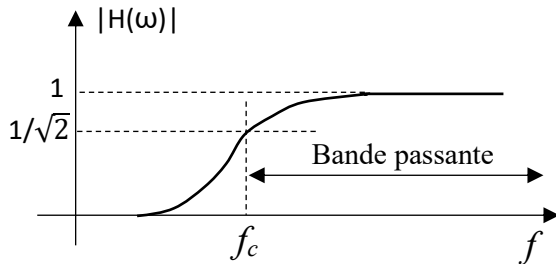
Programme en Matlab (sans l'utilisation de la fonction **bode**).

```
clear;clc;
R=1e3;C=1e-6;
fc=1/(2*pi*R*C);
f=logspace(1,4,40);
ZC=complex(0,-1./(2*pi*f*C));
H=ZC./(ZC+R);
HdB=20*log10(abs(H));
teta=angle(H);
subplot(2,1,1);
semilogx(f,HdB,'LineWidth',2);grid on;hold on;
semilogx([min(f) max(f)],[-3 -3],'r--');
semilogx([fc fc],[0 -40],'r--');
subplot(2,1,2);
semilogx(f,teta,'LineWidth',2);grid on;hold on;
semilogx([min(f) max(f)],[-pi/4 -pi/4],'r--');
semilogx([fc fc],[0 -pi/2],'r--');
```



b) Filtre passe-haut

Un filtre passe-haut laisse passer toutes les fréquences supérieures à la fréquence de coupure f_c et atténue toutes les fréquences inférieures à celle-ci.



La forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

H_0 est l'amplitude de la fonction de transfert à $\omega \rightarrow \infty$.

$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ est la fréquence de coupure.

La fréquence de coupure est la fréquence pour laquelle : $|H(\omega)| = \frac{|H(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}}{\sqrt{2}}$

Exemple d'un filtre passe-haut du premier ordre

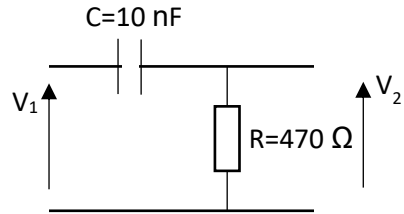
Le filtre passe-haut du premier ordre peut être réalisé par un simple circuit CR.

$$V_2 = \frac{R}{Z_C + R} V_1$$

$$H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R}{Z_C + R} = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{H_0 j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

avec: $H_0 = 1$ et $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$

A.N.: $f_c = \frac{1}{2\pi \times 10^3 \times 10^{-6}} = 33.86 \text{ kHz}$



Diagrammes de Bode:

- Le gain en décibels : $H_{dB}(\omega) = 20 \text{ Log}(|H(\omega)|) = 20 \text{ Log}\left(\frac{H_0 \frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\right)$

$$H_{dB}(\omega) = \begin{cases} -\infty & \omega \ll \omega_c \\ -3 & \omega = \omega_c \\ 1 & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

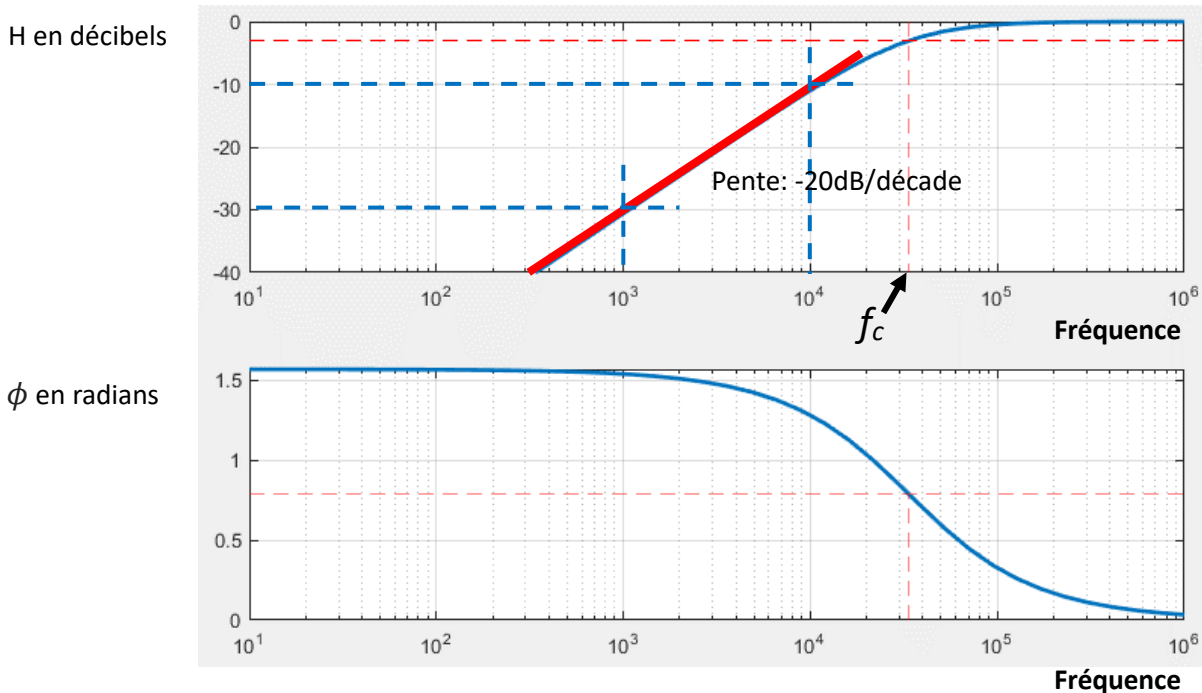
La pente se calcule entre $\omega_1 \ll \omega_c$ et $\omega_2 = 10\omega_1 \ll \omega_c$:

$$H_{dB}(\omega_1 \ll \omega_c) \approx 20 \text{ Log}\left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)$$

$$H_{dB}(\omega_2 = 10 \omega_1 \ll \omega_c) \approx 20 \text{ Log}\left(\frac{10 \omega_1}{\omega_c}\right)$$

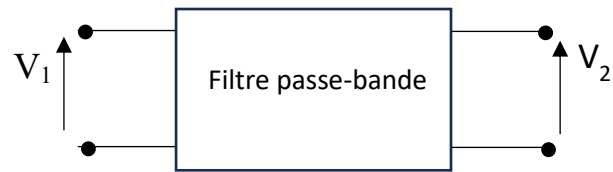
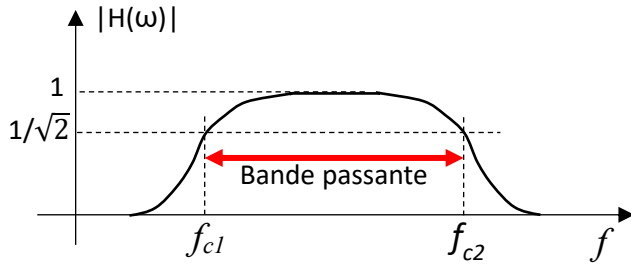
$$\text{Pente} = H_{dB}(\omega_2 = 10 \omega_1) - H_{dB}(\omega_1) = +20 \text{ dB/décade}$$

- La phase en radians : $\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$



c) Filtre passe-bande

Un filtre passe-bande laisse passer toutes les fréquences dans l'intervalle $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$ et atténue toutes les fréquences ailleurs.



La forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande du deuxième ordre s'écrit

$$H(\omega) = \frac{H_0 2m j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2m j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Avec: $H_0 = H(\omega_0)$

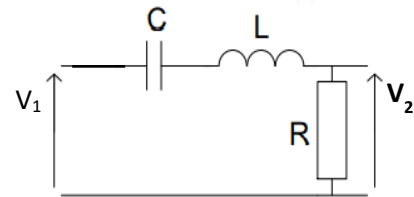
Exemple d'un filtre passe-bande RLC:

$R=100$, $C=10$ nF et $L=1$ μ H.

$$V_2 = \frac{R}{R+Z_L+Z_C} V_1 \Rightarrow H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R}{R+Z_L+Z_C} = \frac{R}{R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{j\omega RC}{j\omega RC+(j\omega)^2 LC+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\omega_0^2} = LC \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \\ \frac{2m}{\omega_0} = RC \Rightarrow m = \frac{RC\omega_0}{2} = \frac{RC}{2\sqrt{LC}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \\ \frac{H_0 2m}{\omega_0} = RC \Rightarrow H_0 = 1 \end{cases}$$



f_0 est la fréquence centrale.

Calcul des fréquences de coupure inférieur f_{c1} et supérieur f_{c2} .

La fréquence de coupure est la fréquence pour laquelle : $|H(\omega)| = \frac{|H(\omega)|_{\omega \rightarrow \omega_0}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

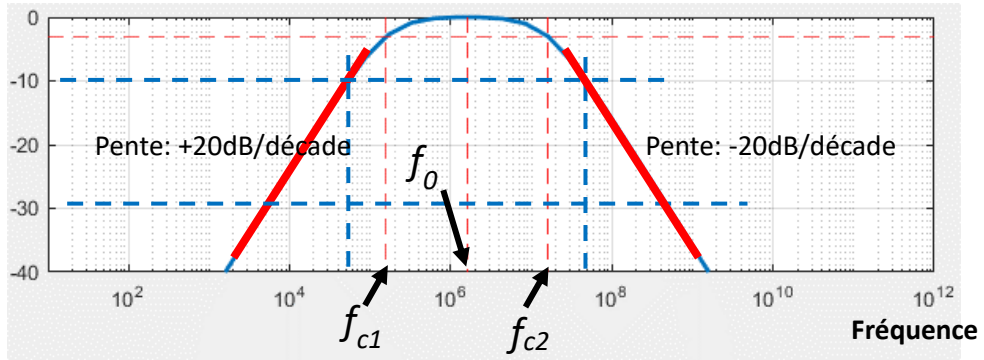
$$\Rightarrow |H(\omega)|^2 = \frac{4m^2 x}{(1-x)^2 + 4m^2 x} = \frac{1}{2}, \quad x = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1 - 2(1 + 2m^2)x + x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = (1 + 2m^2) \pm 2m\sqrt{1 + m^2}$$

$$\Rightarrow f_{c1,2} = f_0 \sqrt{(2m^2 + 1) \pm 2m\sqrt{m^2 + 1}} \Rightarrow f_0^2 = f_{c1} f_{c2}$$

A.N.: $f_0 = 1.59$ MHz , $f_{c1} = 157.6$ kHz , $f_{c2} = 16.07$ MHz.

H en décibels



ϕ en radians

